Прогнозирование и импульсные отклики в линейных системах*

Джон Кохрейн[†]

Университет Чикаго, Чикаго, США

Прогнозирование интересно по ряду причин. Оно рационализирует существование теории временных рядов отдельно от экономической теории. Нетеоретические прогнозы временных рядов часто бывают полезны. Картина прогнозов, наряду с автокорреляционной функцией, является интересной характеристикой временного ряда.

1 Прогнозирование ARMA-моделями

Один из наиболее интересных выводов из ARMA моделей – это формирование прогнозов переменной по ее прошлому. То есть, мы хотим знать $\mathbb{E}[x_{t+j}|I_t]$, где I_t – вся информация, имеющаяся в наличии в момент времени t. Пока что под «всей информацией» подразумеваются все прошлые значения переменной и все прошлые значения инноваций; позже мы уточним, что находится в информационном множестве. Сейчас наша задача – найти

$$\mathbb{E}_t[x_{t+j}] \equiv \mathbb{E}[x_{t+j} \mid x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots].$$

Нам может быть также интересно, насколько мы уверены в прогнозе, что мы квантифицируем с помощью

$$\mathbb{V}_t[x_{t+j}] \equiv \mathbb{V}[x_{t+j} \mid x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots].$$

Мы приведем несколько примеров, а затем задумаемся, какие общие принципы за ними стоят.

AR(1)

Для AR(1), $x_{t+1} = \phi x_t + \varepsilon_{t+1}$, так что имеем:

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}_t[x_{t+1}] = & \mathbb{E}_t[\phi x_t + \varepsilon_{t+1}] & = & \phi x_t, \\
\mathbb{E}_t[x_{t+2}] = & \mathbb{E}_t[\phi^2 x_t + \phi\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}] & = & \phi^2 x_t, \\
\mathbb{E}_t[x_{t+k}] = & \ldots & = & \phi^k x_t.
\end{array}$$

Аналогично,

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{V}_t[x_{t+1}] = & \mathbb{V}_t[\phi x_t + \varepsilon_{t+1}] & = & \sigma_\varepsilon^2, \\
\mathbb{V}_t[x_{t+2}] = & \mathbb{V}_t[\phi^2 x_t + \phi\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}] & = & (1+\phi^2)\sigma_\varepsilon^2, \\
\mathbb{V}_t[x_{t+k}] = & \ldots & = & (1+\phi^2+\phi^4+\ldots+\phi^{2(k-1)})\sigma_\varepsilon^2.
\end{array}$$

Эти траектории условных средних и дисперсий показаны на Рис. 1.

Заметим, что

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}_t[x_{t+k}] = 0 = \mathbb{E}[x_t],$$

*Настоящее эссе – выдержки из курса лекций автора “Time series for macroeconomics and finance,” читаемых в Университете Чикаго. Перевод С. Анатольева. Цитировать как: Кохрейн, Джон (2006) «Прогнозирование и импульсные отклики в линейных системах», Квантиль, №1, стр. 21–26. Citation: Cochrane, John (2006) “Prediction and impulse responses in linear systems,” Quantile, No.1, pp. 21–26.

[†]Адрес: Graduate School of Business, University of Chicago, 5807 S. Woodlawn, Chicago IL 60637, USA. Электронная почта: *john.cochrane@gsb.uchicago.edu*

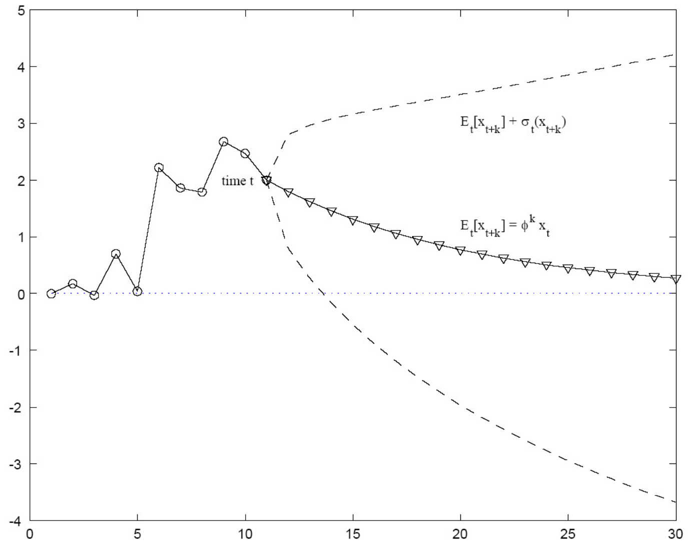

Рис. 1: AR(1): прогноз и стандартное отклонение

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{V}_t[x_{t+k}] = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j}\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{1-\phi^2}\sigma_\varepsilon^2 = \mathbb{V}[x_t].$$

Таким образом, мы можем рассматривать безусловные моменты как пределы условных моментов x_t по мере того как $t \to -\infty$, или как пределы условных моментов x_{t+j} по мере того как горизонт $j \to \infty$.

MA

Предсказывать MA-модели так же просто. Поскольку

$$x_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \ldots,$$

имеем:

$$\mathbb{E}_t[x_{t+1}] = \mathbb{E}_t[\varepsilon_{t+1} + \theta_1\varepsilon_t + \theta_2\varepsilon_{t-1} + \ldots] = \theta_1\varepsilon_t + \theta_2\varepsilon_{t-1} + \ldots,$$
$$\mathbb{E}_t[x_{t+k}] = \mathbb{E}_t[\varepsilon_{t+k} + \theta_1\varepsilon_{t+k-1} + \ldots + \theta_k\varepsilon_t + \theta_{k+1}\varepsilon_{t-1} + \ldots] = \theta_k\varepsilon_t + \theta_{k+1}\varepsilon_{t-1} + \ldots,$$
$$\mathbb{V}_t[x_{t+1}] = \sigma_\varepsilon^2,$$
$$\mathbb{V}_t[x_{t+k}] = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_{k-1}^2)\sigma_\varepsilon^2.$$

AR и ARMA

Общий принцип построения прогнозов – использовать те факты, что $\mathbb{E}_t[\varepsilon_{t+j}] = 0$ и $\mathbb{V}_t[\varepsilon_{t+j}] = \sigma_\varepsilon^2$ для $j > 0$. Выражаем x_{t+j} как сумму объектов, известных в момент t, и инноваций между t и $t+j$:

$$x_{t+j} = \{\text{функция от } \varepsilon_{t+j}, \varepsilon_{t+j-1}, \ldots, \varepsilon_{t+1}\} + \{\text{функция от } \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots, x_t, x_{t-1}, \ldots\}$$

Объекты, известные в момент t, определяют условное среднее, или *прогноз*, а инновации между t и $t+j$ определяют условную дисперсию, или *ошибку прогноза*. Неважно, выражаем ли мы то, что известно в момент t, через x-ы или через ε-ы, – это лишь вопрос удобства. Например, в случае AR(1), мы могли бы записать $\mathbb{E}_t[x_{t+j}] = \phi^j x_t$ или $\mathbb{E}_t[x_{t+j}] = \phi^j\varepsilon_t + \phi^{j+1}\varepsilon_{t-1} + \ldots$. Поскольку $x_t = \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \ldots$, два выражения для $\mathbb{E}_t[x_{t+j}]$, очевидно, идентичны.

Проще всего выразить аналитически прогнозы AR и ARMA моделей (т.е. получить формулы с $\mathbb{E}_t[x_{t+j}]$ в левой части и явным выражением в правой) обращением их в MA(∞)-представление. Чтобы получить численные прогнозы, проще использовать описанное ниже представление «пространством состояний» и рекурсивно их пересчитать.

Многомерные ARMA

Многомерное прогнозирование имеет те же принципы, что и одномерное, где все переменные интерпретируются как векторы и матрицы. Как всегда, нужна осторожность при транспонировании и т.п. Например, если у нас векторная модель MA(∞), $x_t = B(L)$, где $B(L) \equiv B_0 + B_1 L + \ldots$, имеем:

$$\mathbb{E}_t[x_{t+j}] = B_j\varepsilon_t + B_{j+1}\varepsilon_{t-1} + \ldots,$$

$$\mathbb{V}_t[x_{t+j}] = \Sigma + B_1\Sigma B_1' + \ldots + B_{j-1}\Sigma B_{j-1}'.$$

2 Представление «пространством состояний»

Модель AR(1) особенно удобна при вычислениях, поскольку и прогнозы, и ошибки прогнозов можно найти рекурсивно. В этом разделе описан замечательный трюк, с помощью которого любой линейный процесс можно представить как векторный AR(1), что приводит к легкому расчету прогнозов (помимо многого другого).

ARMA в представлении AR(1)

Для примера начнем с ARMA(2,1):

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}.$$

Мы можем это выражение преобразовать в

$$\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \varepsilon_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \theta_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \varepsilon_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\varepsilon_t],$$

что мы можем записать в форме AR(1) как

$$x_t = Ax_{t-1} + Cw_t.$$

Иногда удобно переопределить матрицу C так, чтобы ковариационная матрица инноваций была единичной. Например, если в предыдущей записи положить

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon \\ 0 \\ \sigma_\varepsilon \end{bmatrix},$$

то $\mathbb{E}[w_t w_t'] = I$.

Прогнозирование векторным AR(1)-представлением

Имея векторное AR(1)-представление, мы можем строить прогнозы, находить дисперсии ошибок прогнозов и функции импульсного отклика либо напрямую, либо через соответствующее MA(∞)-представление

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} A^j C w_{t-j}.$$

В любом случае, прогнозы определяются как

$$\mathbb{E}_t[x_{t+k}] = A^k x_t,$$

а дисперсии ошибок прогнозов – как[1]

$$x_{t+1} - \mathbb{E}_t[x_{t+1}] = Cw_{t+1} \Rightarrow \mathbb{V}_t[x_{t+1}] = CC',$$

$$x_{t+2} - \mathbb{E}_t[x_{t+2}] = Cw_{t+2} + ACw_{t+1} \Rightarrow \mathbb{V}_t[x_{t+2}] = CC' + ACC'A',$$

$$\mathbb{V}_t[x_{t+k}] = \sum_{j=0}^{k-1} A^j CC' A^{j\prime}.$$

Эти формулы особенно приятны, поскольку они могут использоваться *рекурсивно*:

$$\mathbb{E}_t[x_{t+k}] = AE_t[x_{t+k-1}]$$

$$\mathbb{V}_t[x_{t+k}] = CC' + A\mathbb{V}_t[x_{t+k-1}]A'.$$

Таким образом, можно запрограммировать расчет целой цепочки прогнозов в одном цикле.

VAR в векторном AR(1)-представлении

Формулы для многомерных прогнозов выглядят не очень-то аппетитно. Можно облегчить пересчет прогнозов VAR, если их также преобразовать в векторную AR(1). Концептуально это просто – надо просто интерпретировать x_t выше как вектор $[y_t \ z_t]'$. Вот наглядный пример. Начнем с обычной VAR:

$$y_t = \phi_{yy1} y_{t-1} + \phi_{yy2} y_{t-2} + \ldots + \phi_{yz1} z_{t-1} + \phi_{yz2} z_{t-2} + \ldots + \varepsilon_{yt},$$

$$z_t = \phi_{zy1} y_{t-1} + \phi_{zy2} y_{t-2} + \ldots + \phi_{zz1} z_{t-1} + \phi_{zz2} z_{t-2} + \ldots + \varepsilon_{zt}.$$

Преобразуем систему а AR(1) следующим образом:

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \\ y_{t-1} \\ z_{t-1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{yy1} & \phi_{yz1} & \phi_{yy2} & \phi_{yz2} & \\ \phi_{zy1} & \phi_{zz1} & \phi_{zy2} & \phi_{zz2} & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ & & \ldots & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \\ y_{t-2} \\ z_{t-2} \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix},$$

или

$$x_t = Ax_{t-1} + \varepsilon_t, \ \mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_t'] = \Sigma.$$

Или же, имея векторную форму VAR

$$x_t = \Phi_1 x_{t-1} + \Phi_2 x_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t,$$

преобразуем ее в

$$\begin{bmatrix} x_t \\ x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \ldots \\ I & 0 & \ldots \\ 0 & I & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ x_{t-3} \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} [\varepsilon_t].$$

[1] Напоминаем, что если x – вектор с ковариационной матрицей Σ и A – подходящая по размерам матрица, то $\mathbb{V}[Ax] = A\Sigma A'$.

Имея в наличии $\mathsf{AR}(1)$-представление, мы можем предсказывать и y, и z, как описано выше. Можно также выбирать матрицу C так, чтобы инновации были ортогональны, т.е. $\mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_t'] = I$.

Преобразование процесса в векторную $\mathsf{AR}(1)$ – очень удобный трюк, как при прогнозировании, так и других целей. Например, Кэмпбелл и Шиллер (Campbell & Shiller, 1988) исследуют приведенную стоимость, т.е. $\mathbb{E}_t[\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j x_{t+j}]$. Если x – дивиденды, то приведенной стоимостью будет цена. Чтобы вычислить приведенную стоимость из VAR с x_t в качестве первого элемента, авторы преобразуют VAR в векторную $\mathsf{AR}(1)$. После этого вычислять становится просто: $\mathbb{E}_t[\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j x_{t+j}] = (\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j A^j) x_t = (I - \lambda A)^{-1} x_t$. Хансен и Саржент (Hansen & Sargent, 1991) показывают, что невообразимое количество моделей посложнее простых ARMA и VAR, рассмотренных выше, можно представить в виде $\mathsf{AR}(1)$.

3 Функции импульсного отклика

Функция импульсного отклика – это траектория (по j), которую описывает x_{t+j}, будучи инициирован единичной инновацией ε_t, т.е. $\varepsilon_{t-j} = 0,\ \varepsilon_t = 1,\ \varepsilon_{t+j} = 0$. Эта функция интересна по нескольким причинам. Во-первых, это еще одна характеристика поведения моделей. Во-вторых, что более важно, она заставляет задуматься о «причинах» и «эффектах». Например, можно рассчитать отклик ВВП на возмущение в денежной массе в VAR «ВВП–Деньги» и интерпретировать результат как «эффект» влияния на ВВП денежной политики.

Для $\mathsf{AR}(1)$-модели, $x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$. Из $\mathsf{MA}(\infty)$-представления видно, что функция импульсного отклика есть

$$\begin{array}{lccccccc} \varepsilon_t: & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_t: & 0 & 0 & 1 & \phi & \phi^2 & \phi^3 & \dots \end{array}$$

Аналогично, для $\mathsf{MA}(\infty)$, $x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \varepsilon_{t-j}$, и

$$\begin{array}{lccccccc} \varepsilon_t: & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_t: & 0 & 0 & 1 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \dots \end{array}$$

Как обычно, векторные процессы подчиняются тем же закономерностям. Если записать векторное $\mathsf{MA}(\infty)$-представление как $x_t = B(L)\varepsilon_t$, где $\varepsilon_t \equiv [\varepsilon_{yt}\ \varepsilon_{zt}]'$ и $B(L) \equiv B_0 + B_1 L + \dots$, то $\{B_0, B_1, \dots\}$ определяют функцию импульсного отклика. Точнее, $B(L)$ означает

$$B(L) = \left[\begin{array}{cc} b_{yy}(L) & b_{yz}(L) \\ b_{zy}(L) & b_{zz}(L) \end{array} \right],$$

так что $b_{yy}(L)$ содержит отклик y_{t+j} на единичное (в терминах y) возмущение ε_{yt}, $b_{yz}(L)$ содержит отклик y_{t+j} на единичное (в терминах z) возмущение ε_{zt}, и т.д.

Так же, как и в случае прогнозов, $\mathsf{MA}(\infty)$-представление удобно для аналитического изучения импульсных откликов, но их преобразование в векторное $\mathsf{AR}(1)$-представление более удобно для расчета их на практике. Функция импульсного отклика для векторной $\mathsf{AR}(1)$ выглядит, как в вышеописанном случае скалярной $\mathsf{AR}(1)$. Для

$$x_t = A x_{t-1} + C\varepsilon_t$$

функция импульсного отклика есть

$$C, AC, A^2C, \dots, A^kC.$$

Опять же ее можно рассчитать рекурсивно, умножая вновь и вновь на A. Если же нужен отклик y_t, а не всего вектора состояний, необходимо домножить на $[1\ 0\ 0\ \dots]'$, чтобы выделить y_t, первый элемент вектора состояний.

Хотя результат выглядит как аналогичный (и тривиальный) отклику для AR(1), необходимо осознавать, что A и C – матрицы, и простая формула может содержать сложную динамику *любой* ARMA-модели конечного порядка. Например, для AR(2) функция импульсного отклика может содержать затухающие синусоиды.

Некоторые факты об импульсных откликах

Из этих примеров следуют три важных свойства импульсных откликов.

1. MA(∞)-представление – это то же, что и функция импульсного отклика.

Этот факт очень полезен.

2. Самый легкий способ рассчитать MA(∞)-представление – просимулировать функцию импульсного отклика.

Интуитивно ясно, что импульсные отклики имеют отношение к прогнозам. Первые и последние связаны следующим образом:

3. Функция импульсного отклика – это то же, что и $\mathbb{E}_t[x_{t+j}] - \mathbb{E}_{t-1}[x_{t+j}]$.

Поскольку ARMA-модели линейны, отклик на единичное возмущение, если значение серии равно нулю, тот же, что и отклик на единичное возмущение, если система подвержена другим возмущениям. Это *неверно* для нелинейных моделей!

Список литературы

Campbell, J.Y. & R.J. Shiller (1988). Stock prices, earnings, and expected dividends. *Journal of Finance* 43, 661–676.

Hansen, L.P. & T.J. Sargent (1991). Lecture notes on least squares prediction theory. In L.P. Hansen & T. J. Sargent (Eds.), Rational Expectations Econometrics, Boulder and Oxford: Westview Press.

Prediction and impulse responses in linear systems

John Cochrane

University of Chicago GSB, Chicago, USA

Prediction is interesting for a variety of reasons. It is one of the few rationalizations for time-series to be a subject of its own, divorced from economics. Atheoretical forecasts of time series are often useful. The pattern of forecasts is also, like the autocorrelation function, an interesting characterization of the behavior of a time series.