

# Тестирование на предсказуемость<sup>\*</sup>

Станислав Анатольев<sup>†</sup>

*Российская экономическая школа, Москва, Россия*

В настоящем эссе содержится краткий обзор существующих простых тестов на предсказуемость различных характеристик стационарных временных рядов.

## 1 Предсказуемость и нулевая гипотеза

Разговор в настоящем эссе пойдет о прогнозировании стационарного ряда  $y_t$  своей предысторией  $\mathcal{I}_{t-1} = \{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$ , а точнее, предиктором  $x_t$  из этой предыстории. Предиктор должен быть тоже стационарен и вдобавок недискретен. Наиболее актуально говорить о финансовой доходности в качестве  $y_t$ , хотя речь может идти и о росте ВВП, инфляции и т.д.

Положим, мы хотим проверить нулевую гипотезу

$$H_0 : \mathbb{E}[g(y_t)|\mathcal{I}_{t-1}] = \text{const},$$

где  $g(u)$  – выбранная нами функция. Такая гипотеза звучит как «непредсказуемость  $g$ » или «условная независимость  $g$ ». Например, если  $g(u) = u$ , мы говорим о «непредсказуемости среднего», а если  $g(u) = \text{sign}(u)$ , то о «непредсказуемости знака». В принципе, понятие «непредсказуемость дисперсии» соответствует выбору  $g(u) = (u - \mathbb{E}[u])^2$ , но здесь, к сожалению, фигурирует неизвестный параметр  $\mathbb{E}[u]$ . Зато легко говорить о совместной «условной независимости среднего и дисперсии», если  $\mathbf{g}(u) = (u, u^2)'$ .

Еще раз подчеркнем, что выбор  $g(u)$  диктует то единственное (если функция  $g(u)$  скалярна) свойство непредсказуемости, которое будет проверяться обсуждаемыми тестами. При этом одно из таких свойств может быть не связано с другим. Например, возьмем чистую ARCH-модель  $y_t = \mu + \varepsilon_t$ , где  $\varepsilon_t | \mathcal{I}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$ , а  $\mu \neq 0$ . Здесь имеется условная независимость среднего, так как  $\mathbb{E}[y_t | \mathcal{I}_{t-1}] = \mu = \text{const}$ . Очевидно, что ряд, подчиняющийся такой модели, не обладает свойством условной независимости дисперсии, ибо  $\sigma_t^2 \neq \text{const}$ . Менее очевидно (см. Christoffersen & Diebold, 2006), что он к тому же знакопредсказуем:

$$\mathbb{E}[\text{sign}(y_t) | \mathcal{I}_{t-1}] = 2\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma_t}\right) - 1 \neq \text{const}.$$

Если же мы немного изменим модель, взяв простейший вариант ARCH-M  $y_t = \gamma\sigma_t + \varepsilon_t$ , где  $\gamma > 0$  и  $\varepsilon_t | \mathcal{I}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$ , наш ряд будет предсказуем в смысле среднего, так как  $\mathbb{E}[y_t | \mathcal{I}_{t-1}] = \gamma\sigma_t \neq \text{const}$ , но непредсказуем в смысле знака:

$$\mathbb{E}[\text{sign}(y_t) | \mathcal{I}_{t-1}] = 2\Phi(\gamma) - 1 = \text{const}.$$

Проще всего, конечно, построить пример ряда с непредсказуемой дисперсией, но предсказуемыми средним и знаком:  $y_t = \mu_t + \varepsilon_t$ , где  $\varepsilon_t | \mathcal{I}_{t-1} \sim N(0, \sigma^2)$ , а  $\mu_t \neq \text{const}$ .

Если мы говорим об отсутствии предсказуемости любого типа, то, скорей всего, мы имеем в виду серийную независимость временного ряда. Такую гипотезу можно протестировать, например, широко известным BDS-тестом.

<sup>\*</sup>Цитировать как: Анатольев, Станислав (2006) «Тестирование на предсказуемость», Квантиль, №1, стр. 39–42. Citation: Anatolyev, Stanislav (2006) “Testing for predictability,” Quantile, No.1, pp. 39–42.

<sup>†</sup>Адрес: 117418, г. Москва, Нахимовский проспект, 47, офис 1721(3). Электронная почта: [sanatoly@nes.ru](mailto:sanatoly@nes.ru)

## 2 Тестирование

Некоторые из тестов на предсказуемость разработаны в эконометрической литературе, другие – в финансовой.

Если нас интересует тестирование на непредсказуемость знака, можно воспользоваться DA-тестом (от “directional accuracy”), описанным в Pesaran & Timmermann (1992). Вообще-то авторы формулировали нулевую гипотезу и тестовую статистику в терминах индикаторов события «направление прогноза совпало с реализованным направлением», но ввиду линейной зависимости между знаком и индикатором тестовые статистики получают асимптотически эквивалентны (см. Anatolyev & Gerko, 2005). Тестовая статистика равна

$$DA = \sqrt{\frac{T}{\hat{V}_{DA}}} \left( \frac{1}{T} \sum_t \text{sign}(x_t) \text{sign}(y_t) - \left( \frac{1}{T} \sum_t \text{sign}(x_t) \right) \left( \frac{1}{T} \sum_t \text{sign}(y_t) \right) \right),$$

где

$$\hat{V}_{DA} = (1 - \hat{m}_x^2)(1 - \hat{m}_y^2), \quad \hat{m}_y = \frac{1}{T} \sum_t \text{sign}(y_t), \quad \hat{m}_x = \frac{1}{T} \sum_t \text{sign}(x_t),$$

и асимптотически распределена как  $N(0, 1)$  под нулевой гипотезой.

Схожий по построению тест на непредсказуемость среднего разработан в Anatolyev & Gerko (2005) и называется EP-тестом (от “excess profitability”). Тестовая статистика равна

$$EP = \sqrt{\frac{T}{\hat{V}_{EP}}} \left( \frac{1}{T} \sum_t \text{sign}(x_t) y_t - \left( \frac{1}{T} \sum_t \text{sign}(x_t) \right) \left( \frac{1}{T} \sum_t y_t \right) \right),$$

где

$$\hat{V}_{EP} = (1 - \hat{m}_x^2) \frac{1}{T} \sum_t (y_t - \bar{y})^2,$$

и асимптотически распределена как  $N(0, 1)$  под нулевой гипотезой. Интересно, что в отличие от DA-теста EP-тест имеет экономическую интерпретацию в случае, когда  $y_t$  – логарифмическая доходность какого-то актива. А именно, EP-статистика есть нормализованная доходность трейдинговой стратегии, предписывающей покупать при положительном прогнозе доходности и продавать при отрицательном, сверх доходности определенной пассивной позиции. Отсюда и название теста.

Описанные в финансовой литературе тесты на предсказуемость обычно имеют вид линейной регрессии, при этом тестируется какой-то коэффициент на равенство нулю. Алгоритм часто именуется тестированием на способность побить рынок (“market timing ability”). Например, Breen, Glosten & Jagannathan (1989) предложили прогонять парную регрессию индикатора события «реализованная доходность положительна» на индикаторе события «прогноз доходности положителен» и тестировать коэффициент наклона на равенство нулю (назовем это BGJ-тестом). Cumber & Modest (1987) предложили использовать парную регрессию самой реализованной доходности на индикаторе события «прогноз доходности положителен» (пусть это будет CM-тест). Мало того, Breen, Glosten & Jagannathan (1989) заодно предложили поменять правую и левую части в их регрессии, то есть прогонять парную регрессию индикатора события «прогноз доходности положителен» на индикаторе события «реализованная доходность положительна» (пусть это будет обратный BGJ-тест). Авторы, кстати, упоминают, что последний тест асимптотически эквивалентен знаменитому тесту Henriksson & Merton (1981), основанному на тестировании независимости в факторной таблице  $2 \times 2$ .

Anatolyev (2006) показал, что многие из упомянутых тестов, несмотря на несхожесть построения, асимптотически эквивалентны (конечно, надо помнить, что при сравнении тестов

они должны тестировать одну и ту же гипотезу). В частности, DA и VGJ тестируют нулевую гипотезу о непредсказуемости знака и асимптотически эквивалентны. Аналогично, EP и SM тестируют нулевую гипотезу о непредсказуемости среднего и также асимптотически эквивалентны<sup>1</sup>. В таком случае проще всего тестировать непредсказуемость  $g$  с помощью парной линейной регрессии в общем случае вида

$$g(y_t) = \alpha_{g,h} + \beta_{g,h}h(x_t) + \eta_t,$$

где  $h(x_t)$  – произвольная функция. Гипотеза  $\mathbb{E}[g(y_t)|\mathcal{I}_{t-1}] = \text{const}$  соответствует ограничению  $\beta_g = 0$ , которое тестируется с помощью t-теста. При этом необходимо применять стандартные ошибки в форме Уайта, кроме тех случаев, когда  $\mathbb{V}[g(y_t)|\mathcal{I}_{t-1}] = \text{const}$  при нулевой гипотезе, что как раз имеет место при непредсказуемости знака. В таких частных случаях можно использовать и стандартные ошибки в обычной форме. Применение стандартных ошибок в форме, совместимой с автокорреляцией и гетероскедастичностью (например, в форме Ньюи–Уэста) тоже возможно, но такой необходимости нет.

Скажем, SM-тест соответствует выбору  $g(u) = u$  (поскольку тестируется гипотеза о непредсказуемости среднего) и  $h(x_t) = \text{sign}(u)$  (без определенной причины). Видно, что мы можем тестировать ту же гипотезу, выбрав, например,  $h(x_t) = u$ , что вполне естественно и делается, например, в Bossaerts & Hillion (1999).

В Anatolyev (2006) показано, что желаемое свойство непредсказуемости можно протестировать, используя и обратную регрессию, примером чего служит обратный VGJ-тест, при условии использования стандартных ошибок в форме Уайта. Применение же стандартных ошибок в форме, совместимой с автокорреляцией и гетероскедастичностью, является в данном случае ошибкой!

Кроме того, в Anatolyev (2006) содержится дискуссия по поводу построения и интерпретации вышеописанных тестов на предсказуемость. Вот некоторые соображения:

- а) Мощность теста варьируется в зависимости от выбора функции  $h(u)$  и максимальна, когда  $h(x_t) - \mathbb{E}[h(x_t)]$  пропорциональна

$$\frac{\delta(x_t) - \mathbb{E}[\delta(x_t)]}{\mathbb{V}[g(y_t)|\mathcal{I}_{t-1}]}$$

при последовательности локальных альтернатив  $\mathbb{E}[g(y_t)|\mathcal{I}_{t-1}] = \delta(x_t) / \sqrt{T}$ .

- б) Гипотезу о совместной непредсказуемости нескольких факторов

$$H_0 : \mathbb{E}[g(y_t)|\mathcal{I}_{t-1}] = \text{const}$$

можно проверить тестированием на равенство нулю всех элементов матрицы коэффициентов  $B_{g,h}$  с помощью Вальдовского теста, основанного на МНК-оценках коэффициентов в системе регрессионных уравнений

$$g(y_t) = \alpha_{g,h} + B_{g,h}h(x_t) + \eta_t,$$

где теперь жирные буквы обозначают вектора. Например, если нас интересует гипотеза о совместной непредсказуемости среднего и дисперсии, естественно оценить с помощью МНК и тестировать гипотезу  $\beta_{y,x} = \beta_{y,x^2} = \beta_{y^2,x} = \beta_{y^2,x^2} = 0$  известными методами в регрессионной системе

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha_y + \beta_{y,x}x_t + \beta_{y,x^2}x_t^2 + \eta_{y,t}, \\ y_t^2 &= \alpha_{y^2} + \beta_{y^2,x}x_t + \beta_{y^2,x^2}x_t^2 + \eta_{y^2,t}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Точнее, надо использовать робастную к возможной гетероскедастичности версию EP-статистике, с добавкой к оценке асимптотической дисперсии  $\hat{V}_{EP}$ , равной  $-2\hat{m}_x(\frac{1}{T} \sum_t \text{sign}(x_t)y_t^2 - \hat{m}_x \frac{1}{T} \sum_t y_t^2)$ .

- в) Когда мы говорим о тестировании в рамках линейной регрессии, мы не имеем в виду, что это «регрессия» в полном понимании этого слова. Точнее, это действительно регрессия в условиях действия нулевой гипотезы, когда  $\beta_g = 0$  и поэтому  $\mathbb{E}[g(y_t)|\mathcal{I}_{t-1}] = \text{const}$ , но вне ее действия это никакая не линейная параметрическая регрессия;  $h(x_t)$  в правой части стоит только потому, что мы сами его/ее туда поставили, и никакая интерпретация связи между  $g(y_t)$  и  $h(x_t)$  недопустима. В прикладной литературе, тем не менее, иногда встречаются даже попытки обосновать причинно-следственную связь между этими функциями, и часто вышеописанная линейная регрессия объявляется параметрической, а тест – параметрическим. Не будем поддаваться искушению – линейное уравнение действительно выглядит как параметрическая регрессия, – но, как мы уже упомянули, регрессией она в общем-то не является и все описанные тесты являются непараметрическими (что, впрочем, очевидно для DA- и EP-тестов).

## Список литературы

- Anatolyev, S. (2006). A unifying view of some nonparametric predictability tests. New Economic School. Доступна в SSRN: <http://ssrn.com/abstract=930007>.
- Anatolyev, S. & A. Gerko (2005). A trading approach to testing for predictability. *Journal of Business & Economic Statistics* 23, 455–461.
- Bossaerts, P. & P. Hillion (1999). Implementing statistical criteria to select return forecasting models: what do we learn? *Review of Financial Studies* 12, 405–428.
- Breen, W., L.R. Glosten & R. Jagannathan (1989). Economic significance of predictable variations in stock index returns. *Journal of Finance* 44, 1177–1189.
- Christoffersen, P.F. & F.X. Diebold (2006). Financial asset returns, direction-of-change forecasting, and volatility dynamics. *Management Science* 52, 1273–1288.
- Cumby, R.E., & D.M. Modest (1987). Testing for market timing ability: a framework for forecast evaluation. *Journal of Financial Economics* 19, 169–89.
- Henriksson, R.D. & R.C. Merton (1981). On market timing and investment performance II: statistical procedures for evaluating forecasting skills. *Journal of Business* 54, 513–533.
- Pesaran, M.H. & A. Timmermann (1992). A simple nonparametric test of predictive performance. *Journal of Business & Economic Statistics* 10, 561–565.

# Testing for predictability

Stanislav Anatolyev

*New Economic School, Moscow, Russia*

This essay contains a short survey of existing simple tests for predictability of various characteristics of stationary time series.