Моделирование волатильности со скачками: применение к российскому и американскому фондовым рынкам*

Сергей Белоусов†

Альфа-Банк, Москва, Россия

Хорошо известно, что доходности финансовых активов характеризуются условной гетероскедастичностью, а само распределение доходностей – тяжелыми хвостами. Кроме того, отличительной особенностью современных финансовых рынков является наличие скачкообразной динамики цен активов. Одна из наиболее популярных моделей, описывающих подобное поведение, – GARCH–J, в которой скачки доходностей описываются распределением Пуассона. В данной работе мы предлагаем новую спецификацию модели, GARCH–TJI, в которой интенсивность скачков зависит от абсолютного значения доходности в предыдущий период, и превышает ли оно некоторый порог. Сравнительный анализ демонстрирует большую эффективность GARCH–TJI-модели, чем у описанной в литературе модели GARCH–ARJI.

Ключевые слова: финансовые доходности, условная гетероскедастичность, интенсивность скачков

Классификация JEL: C22, G12, G15.

1 Введение

В настоящее время общепризнанно, что доходности финансовых активов характеризуются условной гетероскедастичностью, а само распределение доходностей – тяжелыми хвостами. Предложено довольно много моделей, описывающих подобное поведение. Авторегрессионная модель условной гетероскедастичности (ARCH), предложенная в Engle (1982) и позже обобщенная (GARCH) в Bollerslev (1986), является наиболее широко используемой. Модель подразумевает серийную корреляцию второго момента распределения доходностей и кластеризацию волатильности и удачно описывает «гладкие» изменения волатильности. Однако в рамках данного подхода не представляется возможным описать и объяснить резкие и значительные изменения цен, в то время как в действительности отличительной особенностью современных финансовых рынков является именно скачкообразное поведение цен (Jorion, 1988; Bates, 1991).

Традиционно наличие скачков в поведении цен объясняют изменяющимся новостным фоном на рынке. Например, информация, разрешающая неопределенность относительно будущих финансовых результатов какой-либо компании (скажем, новости о выплате дивидендов), может привести к существенному изменению текущих рыночных цен акций этой компании. Согласно данному подходу, наиболее важным фактором, влияющим на динамику цен, является процесс появления новостей на рынке. В работах Tauchen & Pitts (1983), Gallant, Rossi & Tauchen (1992) и Andersen (1996) волатильность доходностей напрямую зависит от интенсивности поступления новостей на рынок. В предложенных моделях интенсивность поступления информации описывается авторегрессионным процессом первого порядка (AR(1)),

*Цитировать как: Белоусов, Сергей (2006) «Моделирование волатильности со скачками: применение к российскому и американскому фондовым рынкам», Квантиль, №1, стр. 101–110. Citation: Belousov, Sergey (2006) "Volatility modeling with jumps: applications to Russian and American stock markets," Quantile, No.1, pp. 101–110.

†Адрес: 107005, Москва, проспект Академика Сахарова, 12. Электронная почта: *SSBelousov@alfabank.ru*

а получающаяся при этом динамика волатильности имеет тенденцию к кластеризации. Однако, существенным недостатком этих моделей является их неспособность объяснить резкие изменения цен и наличие «тяжелых хвостов» в доходностях. В эконометрической литературе было предложено много подходов для разрешения этих проблем. Например, нормальное распределение может быть заменено распределением с «тяжелыми хвостами», например, распределением Стьюдента. Другие альтернативы включают модель Пуассоновских скачков (Press, 1967), где процесс появления резких скачкообразных доходностей описывается Пуассоновским распределением. Данный подход более привлекателен с точки зрения финансовой теории, поскольку позволяет изучать саму природу волатильности.

Модель Пуассоновских скачков в дальнейшем была расширена по ряду направлений. Так, оказалось возможным объединить ее с ARCH/GARCH-моделями в дискретном времени. В этом случае GARCH-модель описывает «гладкие» изменения волатильности, а скачки отвечают за появление нечастых, но значительных доходностей актива.

Общей особенностью первых GARCH–J-моделей являлось предположение о неизменном во времени Пуассоновском распределении (иными словами, интенсивность скачков являлась константой). Однако, кажется логичным, что вероятность скачков может изменяться во времени. Являлась ли вероятность скачка до кризиса 1998 года такой же, как и в другие периоды? Ответ: нет. Chan & Maheu (2002), Maheu & McCurdy (2004) расширили GARCH–J-класс моделей, чтобы позволить распределению скачков изменяться во времени. В предложенной ими спецификации GARCH–ARJI интенсивность скачков описывается авторегрессионным процессом. Это позволяет объяснить кластеризацию скачков во времени. Оценивание этой модели, однако, требует построения сильно нелинейной функции правдоподобия, численная максимизация которой может столкнуться с определенными проблемами.

В данной статье мы рассмотрим модели Chan & Maheu (2002); затем предложим и оценим новую спецификацию GARCH–TJI, в которой интенсивность скачков нелинейным образом зависит от абсолютного значения доходности актива в предыдущий период времени, и превышает ли оно некоторый порог. В работе используются данные о ценах акций и индексов с фондовых бирж ММВБ, РТС и NYSE. Полученные результаты свидетельствуют о наличии скачков на российском фондовом рынке. При этом предложенная нами спецификация GARCH–TJI показывает лучшие результаты по сравнению с моделью GARCH–ARJI для российских акций, в то время как для американского рынка результаты эквивалентны.

2 Модель GARCH–ARJI

В данном разделе мы опишем GARCH–J-модель, предложенную Chan & Maheu (2002), с изменяющейся во времени интенсивностью скачков. В этой модели ненаблюдаемый процесс поступления новой информации влияет на поведение цен. Поток новостей имеет две компоненты: новости, не приводящие к скачкообразному изменению цен, и новости, появление которых на рынке приводит к скачкам в ценах: $r_t = \mu + \sqrt{h_t} \cdot z_t + J_t$, $z_t \sim N(0,1)$. Здесь J_t – компонента, отвечающая за скачки. Поведение скачков описывается распределением Пуассона с изменяющейся во времени интенсивностью скачков. Так, распределение Пуассона с параметром λ_t, условное на информационное множество Φ_{t-1}, описывает реализацию дискретного числа скачков $n_t \in \{0,1,2,\dots\}$, на временном интервале $(t-1,t]$. Условная плотность числа скачков n_t выглядит следующим образом:

$$P\left(n_t = j \,|\Phi_{t-1}\right) = \frac{\exp(-\lambda_t)\lambda_t^j}{j!}\ j = 0,1,2,\dots.$$

Известно, что математическое ожидание случайной величины, распределенной согласно распределению Пуассона, равно интенсивности процесса. Таким образом, условная интенсивность скачков $\lambda_t \equiv \mathbb{E}\left[n_t \,|\Phi_{t-1}\right]$ равна математическому ожиданию числа скачков, условному на информационном множестве Φ_{t-1}. В свою очередь, динамика интенсивности скачков λ_t ведет себя следующим образом:

$$\lambda_t = \lambda_0 + \rho\lambda_{t-1} + \gamma\xi_{t-1}.$$

Данная параметризация представляет собой модель авторегрессионной условной интенсивности скачков (ARJI). Условная интенсивность скачков λ_t здесь имеет авторегрессионный характер и зависит от интенсивности в предыдущий момент времени и остатка ξ_{t-1}. Заметим, что если $\rho = \gamma = 0$, то мы получим модель с постоянной интенсивностью скачков. Остаток ξ_{t-1} определяется как

$$\xi_{t-1} \equiv \mathbb{E}\left[n_{t-1} \left|\Phi_{t-1}\right.\right] - \lambda_{t-1} = \sum_{j=0}^{\infty} j\mathbf{Pr}\left(n_{t-1} = j\left|\Phi_{t-1}\right.\right) - \lambda_{t-1},$$

где $\mathbb{E}\left[n_{t-1} \left|\Phi_{t-1}\right.\right]$ есть наша *ex post*-оценка ожидаемого числа скачков, которые произошли в период (t-2, t-1], в то время как λ_{t-1} по определению равна математическому ожиданию числа скачков n_{t-1}, условному на информационном множестве Φ_{t-2}. Таким образом, ξ_{t-1} представляет собой изменение в условном прогнозе числа скачков n_{t-1} по мере того, как расширяется наше доступное информационное множество:

$$\xi_{t-1} = \mathbb{E}\left[n_{t-1} \left|\Phi_{t-1}\right.\right] - \mathbb{E}\left[n_{t-1} \left|\Phi_{t-2}\right.\right].$$

Заметим также, что из данного представления следует, что остаток ξ_t есть последовательность мартингальных приращений по отношению к информационному множеству Φ_{t-1}:

$$\mathbb{E}\left[\xi_t \left|\Phi_{t-1}\right.\right] = 0.$$

Следовательно, ряд остатков ξ_t в удачно подобранной модели не должен обладать значимой автокорреляцией. Компонента J_t, отвечающая за скачки, равна

$$J_t = \sum_{k=1}^{n_t} Y_{t,k} - \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n_t} Y_{t,k} \left|\Phi_{t-1}\right.\right],$$

где размер скачка $Y_{t,k}$ распределен нормально: $Y_{t,k} \sim NID\left(\theta,\, \delta^2\right)$. Следовательно, скачковая компонента может быть записана как

$$J_t = \sum_{k=1}^{n_t} Y_{t,k} - \theta\lambda_t.$$

Условная дисперсия доходностей также имеет две компоненты: компонента, отвечающая за «гладкие» постепенные изменения волатильности, и скачковая компонента. Условная дисперсия доходностей равна

$$\mathbb{V}\left[r_{t-1} \left|\Phi_{t-1}\right.\right] = h_t + \mathbb{V}\left[J_t \left|\Phi_{t-1}\right.\right].$$

Первая часть условной дисперсии, h_t, описывается GARCH-классом функций

$$h_t = \omega + g(\Lambda, \Phi_{t-1})\varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}, \quad \varepsilon_{t-1} = r_{t-1} - \mu,$$

где $g\left(\cdot\right)$ параметризуется так, чтобы учесть возможные асимметричные эффекты «хороших» и «плохих» новостей на волатильность. Условная дисперсия скачковой компоненты равна

$$\mathbb{V}\left[J_t \left|\Phi_{t-1}\right.\right] = \mathbb{E}\left[n_t \left|\Phi_{t-1}\right.\right]\delta^2 = \lambda_t\delta^2.$$

Вклад этой компоненты в общую волатильность будет изменяться во времени, по мере того как будет изменяться интенсивность скачков λ_t.

Перейдем теперь к описанию функции правдоподобия, которую необходимо максимизировать в процессе оценивания модели. При условии реализации числа скачков j, условная плотность доходностей является нормальной:

$$f\left(r_t\left|n_t=j,\Phi_{t-1}\right.\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(h_t+j\delta^2\right)}}\exp\left(-\frac{\left(r_t-\mu+\theta\lambda_t-\theta j\right)^2}{2\left(h_t+j\delta^2\right)}\right).$$

Тогда условная плотность равна

$$f\left(r_t\left|\Phi_{t-1}\right.\right)=\sum_{j=0}^{\infty}f\left(r_t\left|n_t=j,\Phi_{t-1}\right.\right)\mathbf{Pr}\left(n_t=j\left|\Phi_{t-1}\right.\right).$$

Теоретически в этом случае необходимо производить бесконечное суммирование. Однако для того чтобы иметь возможность оценивать данную модель, на практике обычно ограничиваются каким-то максимальным числом скачков, после увеличения которого результаты оценивания существенно не меняются (в нашем случае мы ограничивались 25 скачками). Функция лог-правдоподобия представляет собой сумму условных лог-плотностей:

$$\ln L=\sum_{t=1}^{T}\ln f\left(r_t\left|\Phi_{t-1}\right.\right),$$

макисимизация которой производится с помощью численных методов.

Оценивание GARCH–ARJI-модели требует построения так называемого фильтра

$$\mathbf{Pr}\left(n_t=j\left|\Phi_t\right.\right)=\frac{f\left(r_t\left|n_t=j,\ \Phi_{t-1}\right.\right)\mathbf{Pr}\left(n_t=j\left|\Phi_{t-1}\right.\right)}{f\left(r_t\left|\Phi_{t-1}\right.\right)}.$$

Данный фильтр впоследствии может использоваться для оценивания вероятностей реализации того или иного числа скачков. Например, *ex post*-оценка вероятности как минимум одного скачка равна

$$\mathbf{Pr}\left(n_t\geqslant 1\left|\Phi_t\right.\right)=1-\mathbf{Pr}\left(n_t=0\left|\Phi_t\right.\right).$$

3 Модель GARCH–TJI

В этом разделе мы предложим новую спецификацию GARCH–J-модели, которую мы назовем GARCH–TJI, от *Threshold Jump Intensity*. Как и в GARCH–ARJI-модели, доходность актива есть сумма двух стохастических компонент, «нормальной» и скачковой инноваций: $r_t=\mu+\sqrt{h_t}\cdot z_t+J_t$, $z_t\sim N(0,1)$.

Скачковая компонента равна

$$J_t=\sum_{k=1}^{n_t}Y_{t,k}-\theta\lambda_t.$$

Число скачков, как и ранее, также распределено согласно распределению Пуассона с изменяющейся во времени интенсивностью:

$$\mathbf{Pr}\left(n_t=j\left|\Phi_{t-1}\right.\right)=\frac{\exp(-\lambda_t)\lambda_t^j}{j!},\quad j=0,1,2,\ldots.$$

Однако интенсивность скачков зависит от доходности актива в предыдущий момент времени:

$$\lambda_t=\lambda_0+\phi\cdot\left(|r_{t-1}-\mu|-\psi\right)\cdot\mathbb{I}\left[\left(|r_{t-1}-\mu|-\psi>0\right)\right].$$

Таблица 1: Описательные статистики для дневных доходностей акций американских компаний и американских индексов

	GM	IBM	Intel	DJIA	NASDAQ	S&P500
Наблюдений	7641	6379	4732	11394	4926	13905
Среднее	$0,044$	$0,068$	$0,090$	$0,024$	$0,052$	$0,031$
Стандартное отклонение	$1,808$	$1,855$	$2,914$	$0,963$	$1,851$	$0,902$
Скошенность	$-0,266$	$-0,370$	$-0,437$	$-1,691$	$-0,090$	$-1,334$
Эксцесс	$9,97$	$15,85$	$9,04$	$51,89$	$9,61$	$38,17$
Эксцесс*	$6,45$	$9,44$	$8,55$	$8,73$	$8,63$	$8,93$
Минимум	$-23,56$	$-26,92$	$-24,87$	$-25,63$	$-16,35$	$-22,90$
Максимум	$13,59$	$12,36$	$23,53$	$9,67$	$17,20$	$8,71$

Замечания: * – без учета «черного понедельника» 19 октября 1987 г.

Таким образом, если абсолютное значение доходности в предыдущий период времени превышает некий порог ψ, интенсивность скачков растет. Данная спецификация выглядит более интуитивной по сравнению с GARCH–ARJI, так как в нашем случае интенсивность скачков зависит от абсолютной доходности, которая является приближением оценки волатильности, что помимо прочего объясняет тенденцию кластеризации скачков во времени. Кроме того, данная спецификация имеет преимущество при оценивании, т.к. здесь нет необходимости в построении фильтра.

4 Описание данных

Оценивание моделей производилось на американских и российских данных. В качестве американских данных использовались ежедневные цены закрытия акций General Motors, IBM, Intel и фондовых индексов DJIA и S&P500. Период оценивания моделей заканчивается в марте 2005 г. В качестве российских данных использовались ежедневные цены закрытия акций РАО ЕЭС, Лукойла, Ростелекома, Сбербанка и СургутНГ (Сургутнефтегаза). Период оценивания включает 4 года наблюдений: с февраля 2001 г. по март 2005 г. Описательные статистики для используемых выборок представлены в таблицах 1 и 2. Видно, что распределение ежедневных доходностей российских и американских акций не является нормальным: так, эксцесс значимо превышает 3. Эксцесс снизится, если исключить из периода оценки так называемый «черный понедельник», день обвала американского фондового рынка (27 октября 1987 г.). Однако, и в этом случае эксцесс превышает значение 3, что указывает на наличие у распределения «толстых хвостов».

5 Результаты оценивания

В данном разделе мы опишем основные результаты оценивания. В таблице 3 представлены оценки GARCH–ARJI-модели для американских данных. Как можно заметить, волатильность американских акций и индексов обладает высоким постоянством, так как сумма GARCH-коэффициентов α и β близка к единице – отличительная особенность финансовых рядов. Также в доходностях присутствует эффект рычага, так как оценки γ положительны. Все оценки параметров интенсивности статистически высокозначимы. Кроме того, хорошо видно, что интенсивность также обладает высоким постоянством, что указывает на тенденцию к кластеризации скачков во времени. Скачки на американском фондовом рынке главным образом связаны с отрицательными движениями в ценах, поскольку оценки параметра θ являются либо отрицательными, либо незначимыми. Размер скачков (стандартное отклонение

Таблица 2: Описательные статистики для дневных доходностей акций российских компаний

	РАО ЕЭС	Ростелеком	СургутНГ	Лукойл	Сбербанк	РТС
Наблюдений	1247	1247	1247	1247	1247	1247
Среднее	$0,040$	$-0,030$	$0,082$	$0,069$	$0,200$	$0,092$
Стандартное отклонение	$3,167$	$2,998$	$3,051$	$2,589$	$2,722$	$2,151$
Скошенность	$-0,039$	$-0,074$	$-0,163$	$-0,449$	$-0,240$	$-0,501$
Эксцесс	$4,97$	$5,13$	$6,44$	$7,19$	$8,31$	$6,04$
Минимум	$-14,83$	$-11,53$	$-15,75$	$-16,56$	$-18,66$	$-11,53$
Максимум	$12,54$	$16,58$	$16,99$	$12,85$	$12,49$	$9,62$

Таблица 3: Результаты оценки модели GARCH–ARJI для американских данных

	GM	IBM	Intel	DJIA	S&P500
μ	$0,040$	$0,056$	$0,100$	$0,025$	$0,034$
ω	$0,007$	$0,009$	$0,047$	$0,005$	$0,005$
α	$0,009$	$0,013$	$0,012$	$0,018$	$0,021$
β	$0,977$	$0,970$	$0,968$	$0,946$	$0,930$
γ	$0,008$	$0,009$	$0,010$	$0,048$	$0,068$
λ_0	$0,030$	$0,031$	$0,015$	$0,005$	$0,020$
ρ	$0,876$	$0,659$	$0,840$	$0,769$	$0,289$
κ	$0,409$	$0,223$	$0,445$	$0,351$	$0,486$
θ	$0,118^{*}$	$0,310^{*}$	$-1,338$	$-0,642$	$-0,500$
δ	$2,053$	$3,325$	$4,590$	$2,112$	$1,695$
$Q(20)$	$29,28$	$20,01$	$35,09$	$41,79^{**}$	$20,32$

Замечания: $Q(20)$ – статистика Льюнга–Бокса с 20-ю лагами, * – незначимые на уровне 5%, ** – значимые на уровне 5%

скачковой компоненты) является наиболее высоким для Intel ($4,590\%$) и самым низким для S&P500 ($1,695\%$). Отметим хорошую спецификацию модели: тест Льюнга–Бокса отвергает наличие автокорреляции в остатках процесса интенсивности только для DJIA.

Результаты оценивания модели для российских данных (таблица 4) не так высоко значимы, особенно для параметров интенсивности. Тем не менее, стабильность интенсивности скачков и волатильность довольно высоки. Скачки в основном сопровождаются падением цены актива, при этом размер скачка близок к 2%. Несмотря на то, что много параметров незначимо, статистика Льюнга–Бокса отвергает модель только для Ростелекома.

В таблице 5 представлены результаты оценивания GARCH–TJI-модели на американских данных. Заметим, что эти результаты почти такие же, как и для GARCH–ARJI-модели. Однако почти все оценки являются значимыми для российских данных (таблица 6). Согласно этим оценкам, акция, скачки в поведении которой встречаются наиболее часто, – это Сбербанк (порог 0.59%). Эти скачки, однако, не столь неприятны для инвесторов (предполагая, что они в длинной позиции), так как в среднем они являются положительными (по знаку).

В таблице 7 представлена статистика условной интенсивности и волатильности скачков. Хорошо видно, что скачки имеют тенденцию реализовываться раз в два дня, так как средняя интенсивность близка к $0,5$. Скачки объясняют большую часть волатильности, от 37% для Лукойла до 93% для Сбербанка. В таблице 8 представлены результаты внутривыборочного

Таблица 4: Результаты оценки модели GARCH–ARJI для российских данных

	РАО ЕЭС	Ростелеком	СургутНГ	Лукойл	Сбербанк	РТС
μ	$0,076^*$	$0,0737^*$	$0,069^*$	$0,080^*$	$0,251^*$	$0,125$
ω	$0,021$	$0,000^*$	$0,222$	$0,045$	$0,021^*$	$0,076$
α	$0,008$	$0,000^*$	$0,034^*$	$0,025$	$0,000^*$	$0,081$
β	$0,915$	$0,990$	$0,850$	$0,956$	$0,979$	$0,912$
γ	$0,073$	$0,006^*$	$0,034^*$	$-0,016^*$	$-0,002^*$	$-0,085$
λ_0	$0,044$	$0,049$	$0,097^*$	$0,067$	$0,052^*$	$0,078$
ρ	$0,931$	$0,941$	$0,865$	$0,882$	$0,949$	$0,869$
κ	$0,243^*$	$0,738$	$0,673^*$	$1,077$	$0,321^*$	$1,361$
θ	$-0,001^*$	$-0,448$	$-0,222^*$	$-0,794$	$0,106^*$	$-0,678$
δ	$2,556$	$2,365$	$2,419$	$2,163$	$2,769$	$2,424$
$Q(20)$	$28,88$	$39,12^{**}$	$16,50$	$29,39$	$20,71$	$36,80$

Замечания: $Q(20)$ – статистика Льюнга–Бокса с 20-ю лагами, * – незначимые на уровне 5%, ** – значимые на уровне 5%

Таблица 5: Результаты оценки модели GARCH–TJI для американских данных

	GM	IBM	Intel	DJIA	S&P500
μ	$0,044$	$0,063$	$0,102$	$0,025$	$0,034$
ω	$0,006$	$0,011$	$0,073$	$0,005$	$0,005$
α	$0,016$	$0,016$	$0,016$	$0,022$	$0,023$
β	$0,965$	$0,964$	$0,952$	$0,940$	$0,927$
γ	$0,016$	$0,012$	$0,026$	$0,053$	$0,071$
λ_0	$0,160$	$0,074$	$0,027$	$0,016$	$0,024$
ϕ	$0,208$	$0,094$	$0,015$	$0,584^*$	$0,232$
ψ	$2,718$	$2,696$	$3,417$	$3,700$	$2,015$
θ	$0,229^*$	$0,459$	$-1,804$	$-0,507$	$-0,499$
δ	$2,107$	$3,374$	$6,431$	$2,164$	$1,679$

Замечания: * – незначимые на уровне 5%

Таблица 6: Результаты оценки модели GARCH–TJI для российских данных

	РАО ЕЭС	Ростелеком	СургутНГ	Лукойл	Сбербанк	РТС
μ	$0,059^*$	$0,048^*$	$0,058^*$	$0,123^*$	$0,212$	$0,104$
ω	$0,008^*$	$0,154$	$0,215$	$0,168$	$0,135$	$-0,002$
α	$0,024$	$0,048$	$0,063$	$0,063$	$0,033$	$0,096$
β	$0,896$	$0,882$	$0,767$	$0,877$	$0,818$	$0,865$
γ	$0,076$	$0,060$	$0,086$	$0,025^*$	$0,075$	$-0,022^*$
λ_0	$0,427$	$0,614$	$0,570$	$0,549$	$0,212$	$0,405$
ϕ	$0,836$	$0,730$	$1,254$	$0,261$	$0,101$	$0,505$
ψ	$8,470$	$2,796$	$6,441$	$3,769$	$0,591$	$3,080$
θ	$0,099^*$	$-0,182^*$	$0,025^*$	$-4,234$	$0,267^*$	$-0,443$
δ	$2,924$	$5,758$	$2,448$	$2,351$	$3,062$	$2,243$

Замечания: $Q(20)$ – статистика Льюнга–Бокса с 20-ю лагами, * – незначимые на уровне 5%, ** – значимые на уровне 5%

Таблица 7: Описательная статистика условной интенсивности и волатильности скачков

	РАО ЕЭС	Ростелеком	СургутНГ	Лукойл	Сбербанк	РТС
λ_t	$0,628$	$0,876$	$0,717$	$0,575$	$0,954$	$0,653$
$\mathbb{E}\left[n_t \mid \Phi_t\right]$	$0,630$	$0,880$	$0,717$	$0,576$	$0,877$	$0,658$
$\mathbb{V}\left[r_t \mid \Phi_{t-1}\right]$	$9,797$	$8,627$	$8,939$	$6,141$	$12,57$	$8,213$
$\dfrac{\mathbb{V}\left[J_t \mid \Phi_{t-1}\right]}{\mathbb{V}\left[r_t \mid \Phi_{t-1}\right]}$	$0,483$	$0,506$	$0,476$	$0,369$	$0,928$	$0,396$
κ_z	$4,336$	$5,139$	$4,041$	$5,221$	$11,76$	$4,418$

Замечания: κ_z обозначает эксцесс стандартизованных остатков

Таблица 8: Результаты анализа стоимости под риском

	РАО ЕЭС	Лукойл	Ростелеком	СургутНГ	Сбербанк	РТС
			TARCH			
VaR 95%	4,72% (−0,36)	4,48% (−0,69)	3,87% (−1,48)	4,00% (−1,33)	3,15% (−2,44)	5,33% (0,43)
VaR 99%	0,97% (−0,09)	0,85% (−0,44)	0,97% (−0,09)	0,73% (−0,79)	1,21% (0,61)	1,69% (2,01)
			GARCH–ARJI			
VaR 95%	4.60% (−0.53)	5.33% (0.43)	4.60% (−0.53)	4,12% (−1.17)	4.00% (−1.33)	3.87% (−1.48)
VaR 99%	1.09% (0.26)	0.85% (−0,44)	1.21% (0.61)	0.61% (−1.14)	1.33% (0.96)	1.09% (0.26)
			GARCH–TJI			
VaR 95%	4.84% (−0.21)	5.33% (0.43)	4.60% (−0.53)	4.12% (−1.17)	4.00% (−1.33)	5,33% (0,43)
VaR 99%	0,97% (−0,09)	0,85% (−0,44)	1.09% (0.26)	0.61% (−1.14)	1.45% (1.31)	1.09% (0.26)

Замечания: t-статистики в круглых скобках.

Таблица 9: «Черный понедельник», октябрь 1987 г.

Дата	Доходность	*ex ante* вероятность скачка			*ex post* вероятность скачка		
		J	ARJI	TJI	J	ARJI	TJI
12 октября	$-0,435\%$	$0,014$	$0,108$	$0,016$	$0,007$	$0,063$	$0,009$
13 октября	$1,475\%$	$0,014$	$0,073$	$0,016$	$0,009$	$0,050$	$0,011$
14 октября	$-3,880\%$	$0,014$	$0,053$	$0,016$	$0,247$	$0,642$	$0,269$
15 октября	$-2,417\%$	$0,014$	$0,230$	$0,127$	$0,019$	$0,347$	$0,178$
16 октября	$-4,710\%$	$0,014$	$0,223$	$0,016$	$0,114$	$0,811$	$0,123$
19 октября	$-25,632\%$	$0,014$	$0,364$	$0,462$	$1,000$	$1,000$	$1,000$
20 октября	$5,715\%$	$0,014$	$0,850$	$1,000$	$0,013$	$0,825$	$1,000$
21 октября	$9,666\%$	$0,014$	$0,757$	$0,692$	$0,013$	$0,726$	$0,671$
22 октября	$-3,893\%$	$0,014$	$0,651$	$0,969$	$0,014$	$0,659$	$0,971$
23 октября	$0,017\%$	$0,014$	$0,559$	$0,133$	$0,013$	$0,542$	$0,127$

Таблица 10: Арест Михаила Ходорковского, 25 октября 2003 г.

Дата	Доходность	*ex ante* вероятность скачка			*ex post* вероятность скачка		
		J	ARJI	TJI	J	ARJI	TJI
20 октября	$0,059\%$	$0,304$	$0,117$	$0,333$	$0,177$	$0,065$	$0,191$
21 октября	$-3,605\%$	$0,304$	$0,105$	$0,333$	$0,942$	$0,455$	$0,962$
22 октября	$-4,078\%$	$0,304$	$0,495$	$0,530$	$0,666$	$0,975$	$0,961$
23 октября	$-1,143\%$	$0,304$	$0,819$	$0,634$	$0,258$	$0,881$	$0,585$
24 октября	$1,172\%$	$0,304$	$0,789$	$0,333$	$0,222$	$0,585$	$0,228$
27 октября	$-10,062\%$	$0,304$	$0,497$	$0,333$	$1,000$	$1,000$	$1,000$
28 октября	$4,934\%$	$0,304$	$0,963$	$0,986$	$0,281$	$0,976$	$0,977$
29 октября	$-3,701\%$	$0,304$	$0,917$	$0,707$	$0,310$	$0,998$	$0,751$
30 октября	$-8,140\%$	$0,304$	$0,942$	$0,554$	$0,434$	$1,000$	$0,848$
31 октября	$1,905\%$	$0,304$	$0,989$	$0,959$	$0,277$	$0,973$	$0,940$
3 ноября	$6,327\%$	$0,304$	$0,954$	$0,333$	$0,292$	$0,986$	$0,344$
4 ноября	$2,455\%$	$0,304$	$0,929$	$0,850$	$0,274$	$0,859$	$0,807$
5 ноября	$-1,941\%$	$0,304$	$0,814$	$0,333$	$0,288$	$0,852$	$0,317$

сравнительного анализа на основе показателя стоимости под риском (VaR, value-at-risk). Здесь мы сравниваем эффективность простой пороговой GARCH-модели (TARCH) с двумя спецификациями GARCH–J. Как видим, TARCH-спецификация отвергается для Сбербанка и индекса РТС, в то время как модели GARCH–J дают точные оценки стоимости под риском, с немного более лучшими результатами для GARCH–TJI-модели.

GARCH–J-модели могут использоваться не только для прогнозирования волатильности, но также и для прогнозирования реализации заданного числа скачков. В таблице 9 мы рассмотрим так называемый «черный понедельник» американского фондового рынка, который произошел 19 октября 1987 г. В этот день большинство американских акций испытали самые крупные падения в своей истории. *Ex ante*-вероятность по крайней мере одного скачка в тот день была довольно высока, что указывает на то, что скачок мог быть предсказан (хотя, конечно, не настолько огромный). Как бы то ни было, далеко не все скачки могут быть предсказаны. В таблице 10 видно, что за день до ареста Михаила Ходорковского 25 октября 2003 г. (суббота), вероятность скачка была низкой, что свидетельствует о том, что скачок в следующий рабочий день не мог быть предсказан.

6 Заключение

В данной статье с помощью GARCH–J-моделей мы исследовали наличие скачков в поведении цен американских и российских акций. В работе была предложена новая GARCH–TJI-спецификация GARCH–J-модели, в которой интенсивность скачков положительно зависит от абсолютного значения доходности в предыдущий период, и превышает ли оно некоторый порог. Эта параметризация является более интуитивной и менее сложной в оценивании по сравнению с моделью GARCH–ARJI из Chan & Maheu (2002). Кроме того, на основе анализа стоимости под риском была продемонстрирована сравнительная эффективность предложенной GARCH–TJI-модели для российских акций.

Список литературы

Andersen, T.G. (1996). Return volatility and trading volume: An information flow interpretation of stochastic volatility. *Journal of Finance* 51, 169–204.

Andersen, T.G., L. Benzoni & J. Lund (2002). An empirical investigation of continuous-time equity return models. *Journal of Finance* 62, 1239–1284.

Baba, T., R. Engle, D. Kraft & K. Kroner (1989). Multivariate simultaneous generalized ARCH. Manuscript, UCSD, Department of Economics.

Ball, C.A. & W.N. Torous (1983). A simplified jump process for common stock returns. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 18, 53–65.

Bates, D.S. (1991). The crash of '87: Was it expected? The evidence from the options markets. *Journal of Finance* 46, 1009–1044.

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31, 309–328.

Chan, W.H. (2003). A correlated bivariate poisson jump model for foreign exchange. *Empirical Economics* 28, 669–689.

Chan, W.H. & J.M. Maheu (2002). Conditional jump dynamics in stock market returns. *Journal of Business & Economic Statistics* 20, 377–389.

Engle, R.F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the UK inflation. *Econometrica* 50, 987–1008.

Engle, R.F. (2002). Dynamic conditional correlation – a simple class of multivariate GARCH models. *Journal of Business & Economic Statistics* 20, 339–350.

Gallant, R. A., P.E. Rossi & G. Tauchen (1992). Stock prices and volume. *Review of Financial Studies* 5, 199–242.

Jorion, P. (1988). On jump processes in the foreign exchange and stock markets. *Review of Financial Studies* 1, 427–445.

Maheu, J.M. & T.H. McCurdy (2004). News arrival, jump dynamics, and volatility components for individual stock returns. *Journal of Finance* 59, 755–793.

Press, S. J. (1967). A compound events model for security prices. *Journal of Business* 40, 317–335.

Tauchen, G.E. & M. Pitts (1983). The price variability-volume relationship on speculative markets. *Econometrica* 51, 485–505.

Volatility modeling with jumps: applications to Russian and American stock markets

Sergey Belousov

Alfa-Bank, Moscow, Russia

It is well known that stock returns exhibit conditional heteroskedasticity, and their distribution displays leptokurtosis. Moreover, modern financial markets are characterized by large discrete changes in asset returns. One of the most popular models describing this behavior is the GARCH–J(ump) model, where the arrival of jumps is governed by a Poisson distribution. In this paper we propose a new specification called GARCH–TJI, where the jump intensity depends on the absolute lagged return and whether it exceeds some threshold. The comparative analysis demonstrates a higher effectiveness of the GARCH–TJI model than of the GARCH–ARJI specification described in the literature.
Keywords: stock returns, conditional heteroskedasticity, jump intensity
JEL Classification: C22, G12, G15.