Экскурс в мир инструментальных переменных*

Александр Цыплаков†

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

Настоящее эссе посвящено причинам, по которым возникает корреляция объясняющих переменных и ошибки в приложениях регрессионного анализа, последствиям такой корреляции и методу, который призван помочь решить данную проблему, – методу инструментальных переменных.

1 Введение

Основная теоретическая модель, вокруг которой строится данное эссе – это самая обычная множественная линейная регрессия, которая широко используется в эконометрике:

$$y = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon. \tag{1}$$

Здесь y – объясняемая («зависимая») переменная, $\mathbf{x}$ – вектор-строка m объясняющих переменных (или «регрессоров»),[1] $\boldsymbol{\beta}$ – коэффициенты регрессии, а ε – случайное возмущение (ошибка). Предполагается, что у нас имеются данные, по которым мы оцениваем неизвестные коэффициенты $\boldsymbol{\beta}$. Это пары $(y_i, \mathbf{x}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, подчиняющиеся указанному уравнению:

$$y_i = \mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i,$$

или в матричном виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

В курсах эконометрики для начинающих чаще всего исходят из того, что регрессоры $\mathbf{x}$ фиксированы (неслучайные). Это позволяет существенно упростить рассуждения и сделать изложение одновременно формально корректным и технически несложным. Однако такое предположение, очевидно, нереалистично и не отражает многие важные аспекты моделирования при помощи регрессионного анализа. В частности, если некоторые регрессоры случайные, то вполне может быть, что они в вероятностном смысле связаны с ошибкой, что может приводить к различным сложностям.

Пусть, например, $(y_i, \mathbf{x}_i) \sim IID$, т. е. независимы и одинаково распределены в соответствии с некоторым совместным распределением. Пусть, кроме того, существуют первые и вторые моменты совместного распределения ε_i и $\mathbf{x}_i$. Согласно закону больших чисел, при стремлении количества наблюдений к бесконечности $\mathbf{X}^\intercal\mathbf{X}/n \xrightarrow{p} \mathbf{Q}_{xx}$ и $\mathbf{X}^\intercal\boldsymbol{\varepsilon}/n \xrightarrow{p} \mathbf{Q}_{x\varepsilon}$, где $\mathbf{Q}_{xx} = \mathbb{E}[\mathbf{x}^\intercal\mathbf{x}]$ и $\mathbf{Q}_{x\varepsilon} = \mathbb{E}[\mathbf{x}^\intercal\boldsymbol{\varepsilon}]$. При этом для обычной МНК-оценки

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{OLS}} = (\mathbf{X}^\intercal\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\intercal\mathbf{y}$$

выполнено

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{OLS}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{Q}_{xx}^{-1}\mathbf{Q}_{x\varepsilon}.$$

*Цитировать как: Цыплаков, Александр (2007) «Экскурс в мир инструментальных переменных», Квантиль, №2, стр. 21–47. Citation: Tsyplakov, Alexander (2007) “A guide to the world of instrumental variables,” Quantile, No.2, pp. 21–47.

†Адрес: 630090, г. Новосибирск, Весенний проезд, 6–44. Электронная почта: *tsy@academ.org*

[1] При дальнейшем обсуждении окажется, что уравнение (1) не является регрессией в строгом понимании этого понятия. Тем не менее мы будем ссылаться на (1) как на регрессионное уравнение, а на объясняющие переменные – как на регрессоры.

(Предполагается, что матрица $\mathbf{Q}_{xx}$ невырождена.) Оценки $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}$ состоятельны[2] в смысле сходимости по вероятности тогда и только тогда, когда $\mathbf{Q}_{x\varepsilon} = \mathbf{0}$, т. е. когда регрессоры и ошибки некоррелированы между собой. Если же ε_i и $\mathbf{x}_i$ коррелированы между собой, то свойство состоятельности оценок теряется.

Ситуацию, когда $\mathbf{Q}_{x\varepsilon} \neq \mathbf{0}$, т. е. когда регрессоры и ошибка коррелированы между собой будем для краткости называть – не совсем формально – *эндогенностью регрессоров.*[3]

Чтобы понять, куда смещаются оценки в случае коррелированности регрессоров и ошибки, удобно ввести понятие линейной проекции. Это понятие нам еще понадобится в дальнейшем. Пусть $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$ – две векторные случайные величины. Коэффициенты $\mathbf{A}$ линейной проекции $\mathbf{w}$ на $\mathbf{v}$ должны удовлетворять следующим уравнениям (являющимся аналогом нормальных уравнений):

$$\mathbb{E}[\mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}]\mathbf{A} = \mathbb{E}[\mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathbf{w}].$$

Если решение единственное, то оно находится как[4]

$$\mathbf{A} = \mathbb{E}[\mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}]^{-1}\mathbb{E}[\mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathbf{w}].$$

Определим оператор проекции $\mathcal{P}$ таким образом, что проекция $\mathbf{w}$ на пространство, натянутое на $\mathbf{v}$, равна

$$\mathcal{P}(\mathbf{w}|\mathbf{v}) = \mathbf{v}\mathbf{A}.$$

При этом оказывается верным следующее представление (линейная проекция):

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}\mathbf{A} + \mathbf{u},$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathcal{P}(\mathbf{w}|\mathbf{v})$ – ошибка линейной проекции, такая что $\mathcal{P}(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Эта ошибка некоррелирована с регрессорами $\mathbf{v}$, т. е. $\mathbb{E}[\mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}] = \mathbf{0}$, и имеет нулевое математическое ожидание ($\mathbb{E}[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$), если в $\mathbf{v}$ присутствует константа.

Рассмотрим линейную регрессию (1), где в $\mathbf{x}$ присутствует константа, а ошибка в среднем равна нулю ($\mathbb{E}[\varepsilon] = 0$). Построим линейную проекцию ε на $\mathbf{x}$: $\mathcal{P}(\varepsilon|\mathbf{x}) = \mathbf{x}\boldsymbol{\delta}$. Если регрессоры и ошибка некоррелированы между собой, то $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$. В противном случае $\boldsymbol{\delta} \neq \mathbf{0}$, и фактически вместо указанной регрессии мы имеем

$$y = \mathbf{x}\tilde{\boldsymbol{\beta}} + \tilde{\varepsilon},$$

где $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta}$ и $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \mathbf{x}\boldsymbol{\delta}$.

Если наблюдаемые данные $(\mathbf{y}, \mathbf{X})$ следуют этой модели, то оценка обычным методом наименьших квадратов $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}$ при стремлении количества наблюдений к бесконечности будет сходиться к вектору $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$, а не к вектору $\boldsymbol{\beta}$. В некоторых случаях требуется оценить именно[5] $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$. Однако, во многих приложениях интерес представляет зависимость (1) и оценки коэффициентов $\boldsymbol{\beta}$. Данное уравнение может быть содержательно интересным, например, потому что оно несет информацию, которая важна для экономической теории. Часто нам интересны коэффициенты, которые имели бы причинную интерпретацию, а не просто отражали бы корреляцию между переменными. Например, коэффициенты $\boldsymbol{\beta}$ могут нести информацию о том, как именно некоторые мероприятия экономической политики, изменяющие $\mathbf{x}$, скажутся на y.

[2] Несмещенность оценок $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}$ можно гарантировать при выполнении условий $\mathbb{E}[\varepsilon|\mathbf{x}] = 0$. Однако сама по себе смещенность оценок, если только она исчезает в пределе, при $n \to \infty$, не является столь серьезной проблемой.

[3] В более узком смысле понятие эндогенности относится к ситуации, когда переменные определяются совместно, в рамках системы уравнений (см. пункт 4.1).

[4] Если решение нормальных уравнений не единственно, то можно взять любое решение. Проекция от этого не зависит.

[5] Например, если мы хотим прогнозировать y по $\mathbf{x}$.

2 Почему регрессоры могут быть коррелированы с ошибкой?

Корреляция между регрессорами и ошибкой может быть вызвана разными причинами. Ниже мы рассмотрим наиболее характерные:

- пропущенные переменные, коррелированные с используемыми регрессорами;
- регрессоры, измеренные с ошибкой («ошибки в переменных»);
- одновременные взаимосвязи между переменными (обратная причинность или собственно эндогенность регрессоров);
- лаг зависимой переменной в правой части регрессии с автокоррелированной ошибкой.

2.1 Пропущенные переменные

Пусть интересующее нас уравнение содержит ненаблюдаемую переменную[6] q:

$$y = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta} + \gamma q + v, \tag{2}$$

и пусть в этом уравнении ошибка v не коррелирована с $\mathbf{x}$ и q, т. е. $\mathcal{P}(y|\mathbf{x}) = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta}+\gamma q$. Поскольку q ненаблюдаема, вместо этого мы вынуждены оценивать регрессию

$$y = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon,$$

так что ошибка имеет вид $\varepsilon = \gamma q + v$.

К чему приводит пропуск q? Все зависит от того, есть ли взаимосвязь между пропущенной переменной q и остальными регрессорами. Если есть, то оставшиеся регрессоры «возьмут на себя» часть влияния q на y, и из-за этого коэффициенты при них будут смещенными.

Найдем это смещение количественно. Для этого введем линейную проекцию q на $\mathbf{x}$:

$$q = \mathbf{x}\boldsymbol{\delta} + r = \delta_0 + \delta_1 x_1 + \cdots + \delta_m x_m + r,$$

где $\mathcal{P}(r|\mathbf{x}) = 0$. Подставим эту зависимость в исходное уравнение (2):

$$y = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta} + \gamma(\mathbf{x}\boldsymbol{\delta} + r) + v,$$

что можно переписать в виде

$$y = \mathbf{x}\tilde{\boldsymbol{\beta}} + \tilde{\varepsilon},$$

где $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \gamma\boldsymbol{\delta}$ и $\tilde{\varepsilon} = v + \gamma r$. В этой регрессии регрессоры $\mathbf{x}$ не коррелированы с $\tilde{\varepsilon}$, так что $\mathcal{P}(y|\mathbf{x}) = \mathbf{x}\tilde{\boldsymbol{\beta}}$. Оценки коэффициентов $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ будут смещенными по отношению к интересующем нас коэффициентам $\boldsymbol{\beta}$, если $\gamma \neq 0$ (ненаблюдаемая переменная q входит в исходное уравнение) и $\boldsymbol{\delta} \neq \mathbf{0}$ (т. е. q коррелирует с используемыми регрессорами $\mathbf{x}$).

Типичный пример подобной проблемы – так называемая «минцеровская» регрессия – влияние образования на заработную плату (см. Mincer, 1958):

$$W = \beta_0 + \beta_1 E + \varepsilon. \tag{3}$$

Минцеровская регрессия (интерпретируемая как регрессия зарплаты по человеческому капиталу) имеет важное значение для нескольких разделов экономической теории. Проблема состоит в том, что в большом количестве эмпирических исследований, в которых оценивалась

[6] Можно несколько: $\gamma_1 q_1 + \gamma_2 q_2 + \cdots$, но в данном случае это не имеет значения, коль скоро все переменные q_j ненаблюдаемы.

такая регрессия, не учитывалось возможное смещение, которое возникает из-за ненаблюдаемых природных способностей, которые, как естественно ожидать, влияют как на длительность обучения, так и на зарплату.

Если обозначить способности через A, интересующее нас соотношение следует записать в виде

$$W = \beta_0 + \beta_1 E + \gamma A + v. \tag{4}$$

В коэффициенте β_1 не будет смещения из-за пропуска A, только если E не связано с A. На самом деле это не так – природные способности положительно влияют на величину образования. Таким образом,

$$\mathcal{P}(A|E) = \delta_0 + \delta_1 E + r,$$

где $\delta_1 > 0$. Вместо β_1 мы получим оценку для $\tilde{\beta_1} = \beta_1 + \gamma\delta_1$, где $\gamma\delta_1 > 0$ при $\gamma > 0$. Следовательно, оценивая минцеровскую регрессию обычным МНК, мы переоценим влияние образования как такового. Мыслима ситуация, когда образование вообще не влияет на производительность человека и его зарплату ($\beta_1 = 0$ в уравнении (4)), а положительная корреляция между W и E объясняется только пропуском природных способностей. Такая оценка β_1 не будет иметь никакого отношения к человеческому капиталу.

2.2 Одновременность (двусторонняя причинность)

Одновременность имеет место, когда две или более переменные одновременно влияют друг на друга, так что их значения определяются эндогенно из некоторой системы уравнений.

Хрестоматийным примером одновременности является оценивание уравнения спроса (или предложения, см., например, Working, 1927, Wright, 1928, приложение B). Пусть, например, мы хотим оценить уравнение спроса:

$$Q = \mathbf{x}^D \boldsymbol{\beta}^D + \alpha P + \varepsilon^D. \tag{5}$$

Можем пытаться оценить это уравнение с помощью (обычного) МНК, ожидая получить значимо отрицательную оценку для α (убывающая кривая спроса). Однако, скорее всего, такая оценка будет смещенной, если P и Q определяются на рынке одновременно, как точка пересечения спроса и предложения. Одновременно с уравнением спроса следует принять во внимание уравнение предложения:

$$Q = \mathbf{x}^S \boldsymbol{\beta}^S + \gamma P + \varepsilon^S. \tag{6}$$

Два уравнения образуют систему, в которой P и Q определяются эндогенно. Это так называемые *структурные уравнения* (структурная форма системы одновременных уравнений). Решим систему относительно P и Q и получим *приведенную форму* – зависимость P от $\mathbf{x}^D$, $\mathbf{x}^S$, ε^D, ε^S и зависимость Q от тех же переменных:

$$P = \mathbf{x}^D \boldsymbol{\delta}_{DP} + \mathbf{x}^S \boldsymbol{\delta}_{SP} + \theta_{DP}\varepsilon^D + \theta_{SP}\varepsilon^S,$$
$$Q = \mathbf{x}^D \boldsymbol{\delta}_{DQ} + \mathbf{x}^S \boldsymbol{\delta}_{SQ} + \theta_{DQ}\varepsilon^D + \theta_{SQ}\varepsilon^S.$$

Из приведенной формы видно, в частности, что P зависит от ε^D и, следовательно, если рассматривать уравнение спроса как регрессионное соотношение, то в нем регрессор коррелирует с ошибкой. Тот же эффект возникает в уравнении предложения. Проблема одновременных взаимосвязей (которую еще называют проблемой эндогенности или двусторонней причинности) – очень острая в прикладных исследованиях, и она не ограничивается оцениванием спроса и предложения.

Одним из примеров эндогенности объясняющей переменной в регрессии является уравнение, в котором объясняемой переменной служит логарифм цены на авиабилеты, а объясняющей переменной – индекс концентрации Герфиндаля, показывающий, насколько сильно монополизирован локальный рынок авиаперевозок. Можно собрать данные по различным маршрутам – парам городов – и исследовать подобную зависимость. Но такая интерпретация функциональной связи между ценой и индексом концентрации подразумевает экзогенность индекса концентрации, что, вообще говоря, может не выполняться, поскольку причинность может идти в другом направлении. Это обычное направление критики концепции *Structure – Conduct – Performance*, которая некогда была очень популярна в теории отраслевых рынков и породила огромное количество эмпирических исследований. Исходно подразумевалось, что структура рынка, *Structure* (например, индекс концентрации), влияет на поведение фирм, *Conduct*, а оно, в свою очередь, на прибыльность, эффективность и другие аналогичные характеристики функционирования отрасли, *Performance*. Но постепенно стало ясным, что все три аспекта взаимоувязаны и текущее состояние рынка определяется динамическим взаимодействием соответствующих переменных. В частности, в примере с авиаперевозками цены на рынке (маршруте авиаперевозок) могут влиять на решения фирм по поводу того, входить ли на этот рынок или уйти ли с него, и, тем самым, на индекс концентрации (см. Evans, Froeb & Werden, 1993).

Или пусть требуется выяснить, как влияют прямые иностранные инвестиции на развитие регионов. С этой целью можно оценить регрессию некоторого показателя экономического развития на объем инвестиций и прочие (контрольные) переменные. Вполне возможно, что при этом оценки регрессии укажут на значимо положительную связь между инвестициями и развитием. Но не будет ли тут двусторонней причинности? Ведь инвестиции, скорее всего, идут в экономически развитый регион, в котором ожидается хорошая отдача. Таким образом, мы не можем отделить одно влияние от другого и, оценивая уравнение для одностороннего влияния, получим смещенную оценку – некоторую смесь из двух эффектов.

2.3 Ошибки в переменных

Из-за различных причин экономические переменные, как правило, измеряются с ошибками. Бывает, например, что исследователь постулирует модель и вкладывает в переменные модели определенное содержание, а доступные исследователю данные относятся к переменным, которые не вполне соответствуют этому содержанию. В частности, исследователь может создать анкету для проведения обследования группы индивидуумов. Он вкладывает какой-то свой смысл в вопросы анкеты; в то же время, опрашиваемые могут не вполне понять эти вопросы или забыть правильную информацию. Это только один пример. Существует множество других источников ошибок в переменных.

Если есть ошибки измерения, то соотношения, которые оцениваются эконометристами, могут существенно отличаться от реальности. Если переменные в регрессии измерены с ошибкой, то результаты оценивания регрессии с помощью МНК могут оказаться смещенными. Это происходит из-за того, что ошибки измерения переменных регрессии становятся частью ошибки регрессии. Из-за этого ошибки измерения регрессоров входят и в сами регрессоры, и в ошибку регрессии, так что ошибка регрессии и регрессоры будут коррелированными между собой.

Пусть оценивается уравнение

$$y = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon,$$

однако на самом деле y порождается в соответствии с уравнением

$$y = \mathbf{x}_0\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_0, \tag{7}$$

и при этом $\mathcal{P}(y|\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0\boldsymbol{\beta}$ и $\mathcal{P}(\varepsilon_0|\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Другими словами, $\mathbf{x}$ – это наблюдаемый аналог ненаблюдаемых «настоящих» регрессоров $\mathbf{x}_0$, измеренный с ошибкой:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u},$$

где $\mathbb{E}[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$.

Если подставить $\mathbf{x}_0$, выраженные через $\mathbf{x}$, в уравнение (7), то получится

$$y = (\mathbf{x} - \mathbf{u})\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_0 = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_0 - \mathbf{u}\boldsymbol{\beta}.$$

Таким образом, ошибка оцениваемого уравнения представима следующим образом:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \mathbf{u}\boldsymbol{\beta}.$$

Эта ошибка может коррелировать с используемыми регрессорами $\mathbf{x}$:

$$\mathbb{C}[\mathbf{x}, \varepsilon] = \mathbb{E}[\mathbf{x}^\intercal\varepsilon] = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u})^\intercal(\varepsilon_0 - \mathbf{u}\boldsymbol{\beta})] = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0^\intercal\varepsilon_0] + \mathbb{E}[\mathbf{x}_0^\intercal\mathbf{u}]\boldsymbol{\beta} - \mathbb{E}[\mathbf{u}^\intercal\varepsilon_0] - \mathbb{E}[\mathbf{u}^\intercal\mathbf{u}]\boldsymbol{\beta}.$$

По предположению $\mathbb{E}[\mathbf{x}_0^\intercal\varepsilon_0] = 0$. Если, кроме того, ошибка измерения $\mathbf{u}$ некоррелирована с $\mathbf{x}_0$ и ε_0, то

$$\mathbb{C}[\mathbf{x}, \varepsilon] = -\mathbb{E}[\mathbf{u}^\intercal\mathbf{u}]\boldsymbol{\beta}.$$

Ковариационная матрица ошибки измерения – это некоторая положительно полуопределенная, не равная нулю матрица (если только $\mathbf{u}$ не равна нулю с вероятностью единица, т. е. ошибка измерения отсутствует). Таким образом, кроме вырожденного случая, когда $\mathbb{E}[\mathbf{u}^\intercal\mathbf{u}]\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, регрессоры оцениваемого уравнения коррелируют с ошибкой.

Как можно показать, при сделанных предположениях о ковариациях между ε_0, $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{u}$ выполнено $\mathcal{P}(\varepsilon|\mathbf{x}) = \mathbf{x}\boldsymbol{\delta}$, где

$$\boldsymbol{\delta} = -\big(\mathbb{E}[\mathbf{x}_0^\intercal\mathbf{x}_0] + \mathbb{E}[\mathbf{u}^\intercal\mathbf{u}]\big)^{-1}\mathbb{E}[\mathbf{u}^\intercal\mathbf{u}]\boldsymbol{\beta}.$$

Оценки коэффициентов регрессии β будут смещены на величину $\boldsymbol{\delta}$. В случае единственного регрессора и константы, т. е. модели вида

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon,$$

данную формулу можно записать в виде

$$\delta_1 = -\frac{\mathbb{V}[u]}{\mathbb{V}[x_0] + \mathbb{V}[u]}\beta_1.$$

Вместо β_1 регрессия будет оценивать $\tilde{\beta}_1$, где

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\mathbb{V}[x_0]}{\mathbb{V}[x_0] + \mathbb{V}[u]}\beta_1.$$

Очевидно, что в этом простейшем случае коэффициент наклона β_1 будет смещен в сторону нуля, и его абсолютная величина будет преуменьшаться.

Рис. 1 иллюстрирует этот простой случай. Сплошной линией показана истинная теоретическая зависимость между x_0 и y. Кружќи изображают наблюдения (x_0, y). В результате того, что регрессор наблюдается с ошибкой, эти точки сдвигаются на величину ошибки u по горизонтали. Звездочками обозначены соответствующие наблюдения (x, y). Точки могут смещаться и влево, и вправо, но в целом облако наблюдений из-за ошибки расползается по горизонтали, становясь более плоским. В результате линия регрессии, подогнанная с помощью обычного МНК, оказывается слишком пологой (она показана штриховой линией). Если бы наблюдался исходный регрессор x_0, то подогнанная линия регрессии чаще всего не была бы столь пологой (показана пунктиром).

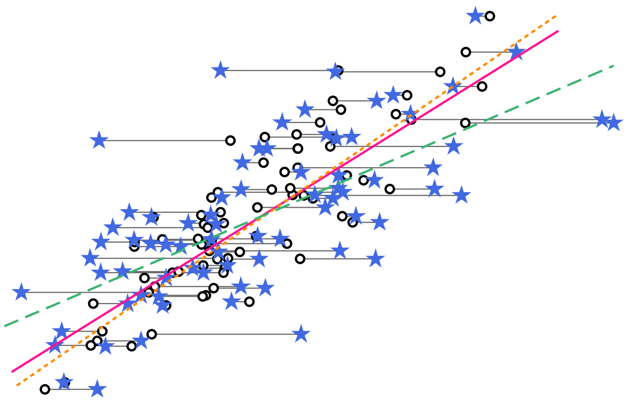

Рис. 1: Ошибки в переменных

2.4 Автокоррелированные ошибки в динамической регрессии

В регрессии с временными рядами с полностью экзогенными регрессорами автокорреляция ошибок не приводит к смещению и несостоятельности оценок.[7] Однако, если среди регрессоров имеются лаги зависимой переменной, то оценки обычного МНК будут несостоятельными. Это объясняется тем, что в этом случае лаги зависимой переменной будут, скорее всего, коррелированы с ошибкой.

Например, если рассматривать модель $\mathsf{ARMA}(1,1)$ как регрессию, в которой в качестве регрессора используется лаг y_t, а ошибка имеет вид $\mathsf{MA}(1)$:

$$y_t = \mu + \varphi y_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{8}$$

где $\varepsilon_t = \eta_t - \theta\eta_{t-1}$, то в этой регрессии y_{t-1} будет зависеть от η_{t-1}, поскольку $y_{t-1} = \varphi y_{t-2} + \mu + \eta_{t-1} - \theta\eta_{t-2}$. Это означает, что в (8) регрессор и ошибка в общем случае зависят от η_{t-1} и коррелированы между собой. Таким образом, обычный МНК не подходит для оценивания $\mathsf{ARMA}(1,1)$.

Модель Койка (геометрического распределенного лага) – еще один пример подобной ситуации. Она имеет вид

$$y_t = \mu + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j x_{t-j} + \varepsilon_t. \tag{9}$$

Применив к этому уравнению преобразование Койка, т. е. умножив его на $1 - \delta\mathsf{L}$, где L – оператор лага, получим

$$y_t = \mu' + \alpha x_t + \delta y_{t-1} + \varepsilon'_t, \tag{10}$$

где $\varepsilon'_t = \varepsilon_t - \delta\varepsilon_{t-1}$ и $\mu' = \mu(1-\delta)$. В этой регрессии опять регрессор y_{t-1} является лагом зависимой переменной, ошибка автокоррелирована (представляет собой процесс $\mathsf{MA}(1)$), и поэтому регрессор будет коррелирован с ошибкой. Конечно, сама по себе модель Койка вряд ли может использоваться в прикладном анализе, но этот простой пример показывает, что проблема корреляции между регрессором и ошибкой легко может проявиться при моделировании динамических взаимосвязей.

[7]Конечно, при этом обычная оценка ковариационной матрицы оценок будет несостоятельной.

3 Метод инструментальных переменных

Предположим, что в регрессии

$$y = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon \tag{11}$$

регрессоры $\mathbf{x}$ являются (частично) случайными, и нарушена гипотеза о том, что ошибка ε не зависима от регрессоров $\mathbf{x}$, так что корреляция между регрессорами $\mathbf{x}$ и ошибкой ε может быть не равной нулю. Для дальнейшего удобно разделить регрессоры на две группы – те, про которые известно, что они не коррелируют с ошибкой, $\mathbf{x}^\circ$ (в количестве m° штук), и те, которые находятся под подозрением и могут коррелировать с ошибкой, $\mathbf{x}^\star$ (в количестве $m^\star = m - m^\circ$ штук):

$$y = \mathbf{x}^\circ\boldsymbol{\beta}^\circ + \mathbf{x}^\star\boldsymbol{\beta}^\star + \varepsilon. \tag{12}$$

Какие существуют способы решения проблемы несостоятельности оценок МНК в такой ситуации? Той информации, наличие которой обычно предполагается при рассмотрении модели регрессии, недостаточно, чтобы получить состоятельные оценки коэффициентов $\boldsymbol{\beta}$.

В зависимости от причины, по которой регрессоры коррелируют с ошибкой, может помочь получение информации разного вида. Например, можно собрать данные по пропущенным переменным, измерять регрессоры с большей точностью, и т. д. Универсальным «лекарством» здесь может являться проведение контролируемого эксперимента, когда значения переменных $\mathbf{x}^\star$ выбираются (назначаются) таким образом, чтобы гарантировать их экзогенность. При этом желательно устанавливать значения переменных случайно, чтобы это был так называемый рандомизированный эксперимент.

Еще один классический способ – и мы на нем здесь сосредоточимся – это получить дополнительную информацию за счет сбора данных о переменных, которые связаны с оцениваемым уравнением только косвенно, через эндогенные регрессоры $\mathbf{x}^\star$. Понятно, что применение любого из упомянутых способов ограничивается необходимыми издержками, этическими соображениями, и часто может быть вовсе невозможным.

3.1 Описание метода

Оказывается, что регрессию (11) можно состоятельно оценить, имея набор (вектор-строку) из p вспомогательных переменных $\mathbf{z}$, называемых *инструментальными переменными*. Часто инструментальные переменные называют просто *инструментами*. В английском языке для обозначения инструментальных переменных и соответствующего метода используется аббревиатура IV (от англ. *instrumental variable* – инструментальная переменная).

Для того чтобы переменные $\mathbf{z}$ можно было использовать в качестве инструментальных, нужно, чтобы они удовлетворяли следующим требованиям.

- Инструменты $\mathbf{z}$ некоррелированы с ошибкой ε (в противном случае метод даст несостоятельные оценки, как и МНК). Если это условие не выполнено, то такие переменные называют *негодными инструментами* (англ. *invalid instruments*).

- Инструменты $\mathbf{z}$ достаточно сильно связаны с регрессорами $\mathbf{x}$, т. е. как говорят, являются *релевантными*. Если данное условие не выполнено, то это так называемые *«слабые» инструменты* (англ. *weak instruments*), а то и вовсе нерелевантные. Если инструменты слабые, то, в частности, оценки по методу будут неточными и при малом количестве наблюдений сильно смещенными. Эти и другие проблемы, возникающие в ситуации, когда инструменты являются слабыми, обсуждаются в разделе 6.

Обычно $\mathbf{x}$ и $\mathbf{z}$ содержат общие переменные, т. е. часть регрессоров используется в качестве инструментов. Например, типична ситуация, когда $\mathbf{x}$ содержит константу; тогда в $\mathbf{z}$ тоже следует включить константу, ибо детерминистические регрессоры по своей природе и годные, и релевантные инструменты. В целом следует включить в число инструментов все регрессоры, которые не коррелируют с ошибкой, т. е. $\mathbf{x}^{\circ}$. Обозначим через $\mathbf{z}^{\dagger}$ те инструментальные переменные ($p^{\dagger} = p - m^{\circ}$ штук), которых нет среди регрессоров, или, другими словами, *внешние инструменты* или *исключенные инструменты*.[8] В этих обозначениях

$$\mathbf{z} = (\mathbf{x}^{\circ}, \mathbf{z}^{\dagger}).$$

Пусть имеются n наблюдений, и $\mathbf{y}$, $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Z}$ – соответствующие данные в матричном виде. Здесь $\mathbf{y}$ – вектор-столбец длиной n, $\mathbf{X} = [\mathbf{X}^{\circ}, \mathbf{X}^{\star}]$ – матрица $n \times m$, $\mathbf{Z} = [\mathbf{X}^{\circ}, \mathbf{Z}^{\dagger}]$ – матрица $n \times p$. *Метод инструментальных переменных* состоит в том, что оценки коэффициентов β вычисляются по формуле

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{IV}} = (\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}\mathbf{y}, \tag{13}$$

где $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}\big(\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{Z}\big)^{-1}\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}$. В таком виде метод также называют иногда *обобщенным* методом инструментальных переменных (GIVE от *generalized instrumental variables estimator*), поскольку количество инструментальных переменных может быть больше количества регрессоров, в отличие от простого (классического) метода инструментальных переменных, для которого $p = m$.

Может быть полезным выработать геометрическую интуицию, связанную с использованием метода инструментальных переменных. Обычный метод наименьших квадратов сводится к поиску линейной комбинации регрессоров $\hat{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$, такой чтобы она ближе всего аппроксимировала зависимую переменную $\mathbf{y}$. Мерой близости служит обычное евклидово расстояние $\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\beta})\|$ (все рассуждения проводятся в n-мерном евклидовом пространстве). Матрица $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$ представляет собой *матрицу проекции* на подпространство, натянутое на столбцы матрицы инструментов $\mathbf{Z}$ (коротко будем говорить «подпространство $\mathbf{Z}$»). Метод инструментальных переменных тоже минимизирует расстояние, но это расстояние между проекциями векторов $\hat{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\beta})$ и $\mathbf{y}$ на подпространство $\mathbf{Z}$, т. е. это расстояние между $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\beta})$ и $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}\mathbf{y}$. На интуитивном уровне, метод инструментальных переменных использует при оценивании регрессии только ту часть изменчивости переменных регрессии, которая остается после проекции их на подпространство $\mathbf{Z}$. Коль скоро инструменты являются годными, то эта часть изменчивости переменных не будет связана с ошибкой, и минимизация расстояния не будет приводить к смещению.

В случае, если количество инструментальных переменных в точности равно количеству регрессоров ($p = m$), получаем собственно классический метод инструментальных переменных. При этом матрица $\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}$ квадратная и оценки вычисляются как

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{IV}} = (\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{Z}\,(\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{Z})^{-1}\,\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{Z}\,(\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{Z})^{-1}\,\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}.$$

Средняя часть формулы сокращается, поэтому

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{IV}} = (\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}. \tag{14}$$

Рассмотрим вывод простого метода инструментальных переменных, т. е. случай точной идентификации. Умножим уравнение регрессии $y = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon$ слева на инструменты $\mathbf{z}$ (с транспонированием). Получим следующее уравнение:

$$\mathbf{z}^{\mathsf{T}}y = \mathbf{z}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{z}^{\mathsf{T}}\varepsilon.$$

[8] Часто именно такие переменные и называют инструментами. Мы тоже иногда будем использовать термин в этом значении.

Если взять от обеих частей математическое ожидание, то с учетом того, что инструменты некоррелированы с ошибкой ($\mathbb{E}[\mathbf{z}^\mathsf{T}\varepsilon] = 0$), получится

$$\mathbf{Q}_{zy} = \mathbf{Q}_{zx}\boldsymbol{\beta},$$

где $\mathbf{Q}_{zx} = \mathbb{E}[\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{x}]$ и $\mathbf{Q}_{zy} = \mathbb{E}[\mathbf{z}^\mathsf{T}y]$.

Заменяя теоретические моменты на выборочные, получим следующие нормальные уравнения, задающие оценки $\hat{\boldsymbol{\beta}}$:

$$\bar{\mathbf{Q}}_{zy} = \bar{\mathbf{Q}}_{zx}\hat{\boldsymbol{\beta}},$$

где $\bar{\mathbf{Q}}_{zy} = \frac{1}{n}\mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{y}$ и $\bar{\mathbf{Q}}_{zx} = \frac{1}{n}\mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{X}$, или

$$\mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}. \tag{15}$$

Очевидно, что эти оценки совпадут с (14). Фактически, мы применяем здесь *метод моментов*.

Метод инструментальных переменных можно рассматривать как так называемый *двухшаговый метод наименьших квадратов* (для него используется аббревиатура 2SLS, от англ. *two-stage least squares*).

1-й шаг. Строим регрессию каждого регрессора $\mathbf{X}_j$ на $\mathbf{Z}$.

$$\mathbf{X}_j = \mathbf{Z}\boldsymbol{\lambda}_j + \mathbf{V}_j. \tag{16}$$

Получим в этой регрессии расчетные значения $\hat{\mathbf{X}}_j$. По формуле расчетных значений в регрессии $\hat{\mathbf{X}}_j = \mathbf{P}_\mathbf{Z}\mathbf{X}_j$. Заметим, что если $\mathbf{X}_j$ входит в число инструментов, то выполнено $\hat{\mathbf{X}}_j = \mathbf{X}_j$, т. е. такая переменная останется без изменений. Значит, данную процедуру достаточно применять только к тем регрессорам, которые не являются инструментами (т. е. могут быть коррелированы с ошибкой). Обобщающее уравнение для регрессий первого шага для таких регрессоров можно записать в виде

$$\mathbf{X}^\star = \mathbf{Z}\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{V} = \mathbf{X}^\circ\boldsymbol{\Lambda}^\circ + \mathbf{Z}^\dagger\boldsymbol{\Lambda}^\dagger + \mathbf{V}. \tag{17}$$

Это уравнение нам понадобится в дальнейшем при обсуждении свойств метода инструментальных переменных. В целом для всей матрицы регрессоров можем записать $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{P}_\mathbf{Z}\mathbf{X}$.

2-й шаг. В исходной регрессии используются $\hat{\mathbf{X}}$ вместо $\mathbf{X}$, т. е. оценивается регрессия вида

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{X}}\boldsymbol{\beta} + \text{ошибка}. \tag{18}$$

Смысл состоит в том, чтобы использовать регрессоры, «очищенные от ошибок». Получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{2SLS}} &= \left(\hat{\mathbf{X}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{X}}\right)^{-1}\hat{\mathbf{X}}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \left(\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{P}_\mathbf{Z}\mathbf{P}_\mathbf{Z}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{P}_\mathbf{Z}\mathbf{y} = \\ &= \left(\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{P}_\mathbf{Z}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{P}_\mathbf{Z}\mathbf{y} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IV}}.\end{aligned}$$

Видим, что оценки совпадают.

Конечно, не обязательно непосредственно рассчитывать регрессии, подразумеваемые двухшаговым МНК, чтобы получить оценки (13). Однако такое двухшаговое представление может быть полезным как для теоретического анализа оценок инструментальных переменных, так и для диагностики модели, оцененной по конкретным данным (см. раздел 6).

Если записать оценки в виде

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IV}} = \left(\hat{\mathbf{X}}^\mathsf{T}\mathbf{X}\right)^{-1}\hat{\mathbf{X}}^\mathsf{T}\mathbf{y}, \tag{19}$$

то видно, что обобщенный метод инструментальных переменных можно рассматривать как простой метод инструментальных переменных с матрицей инструментов $\hat{\mathbf{X}}$. Такая запись позволяет обосновать обобщенный метод инструментальных переменных. Если исходных инструментов $\mathbf{Z}$ больше, чем регрессоров $\mathbf{X}$ ($p > m$), и мы хотим построить на их основе меньшее количество инструментов m, то имеет смысл сопоставить каждому регрессору $\mathbf{X}_j$ в качестве инструмента такую линейную комбинацию исходных инструментов, которая была бы *наиболее близка* к $\mathbf{X}_j$ (в смысле евклидова расстояния). Этому требованию как раз и удовлетворяют расчетные значения $\hat{\mathbf{X}}_j$.

Другое обоснование обобщенного метода инструментальных переменных состоит, как и выше для классического метода, в использовании уравнений $\mathbb{E}[\mathbf{z}^\intercal y] = \mathbb{E}[\mathbf{z}^\intercal \mathbf{x}]\boldsymbol{\beta}$ или $\mathbf{Q}_{zy} = \mathbf{Q}_{zx}\boldsymbol{\beta}$. Заменой теоретических моментов выборочными получим уравнения $\bar{\mathbf{Q}}_{zy} = \bar{\mathbf{Q}}_{zx}\boldsymbol{\beta}$, число которых больше числа неизвестных. Идея состоит в том, чтобы невязки уравнений $\bar{\mathbf{Q}}_{zy} - \bar{\mathbf{Q}}_{zx}\boldsymbol{\beta}$ были как можно меньшими. Это можно сделать, минимизируя следующую квадратичную форму от невязок:

$$(\bar{\mathbf{Q}}_{zy} - \bar{\mathbf{Q}}_{zx}\boldsymbol{\beta})^\intercal \bar{\mathbf{Q}}_{zz}^{-1}(\bar{\mathbf{Q}}_{zy} - \bar{\mathbf{Q}}_{zx}\boldsymbol{\beta}), \tag{20}$$

где $\bar{\mathbf{Q}}_{zz} = \frac{1}{n}\mathbf{Z}^\intercal\mathbf{Z}$. Минимум достигается при

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\bar{\mathbf{Q}}_{zx}^\intercal \bar{\mathbf{Q}}_{zz}^{-1}\bar{\mathbf{Q}}_{zx}\right)^{-1}\bar{\mathbf{Q}}_{zx}^\intercal \bar{\mathbf{Q}}_{zz}^{-1}\bar{\mathbf{Q}}_{zy}.$$

Видим, что эта формула совпадает с (13). Эти рассуждения представляют собой применение так называемого *обобщенного метода моментов*, в котором количество условий на моменты может превышать количество неизвестных параметров.[9]

Выбор $\bar{\mathbf{Q}}_{zz}^{-1}$ в качестве взвешивающей матрицы при минимизации невязок в (20) объясняется тем, что она при обычных предположениях дает наименьшую асимптотическую ковариационную матрицу оценок. Другими словами, это оценки так называемого *эффективного метода моментов*.

При соответствующих предположениях оценки метода инструментальных переменных состоятельные[10] и асимптотически нормальные. Чтобы можно было использовать метод инструментальных переменных на практике, нужна оценка ковариационной матрицы, с помощью которой можно было бы вычислить стандартные ошибки коэффициентов и t-статистики и в целом проверять гипотезы по принципу Вальда. Такая оценка имеет вид

$$\mathbb{V}[\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{IV}}] \approx s^2\left(\hat{\mathbf{X}}^\intercal\hat{\mathbf{X}}\right)^{-1} = s^2\left(\mathbf{X}^\intercal\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}\mathbf{X}\right)^{-1}. \tag{21}$$

Здесь s^2 — оценка дисперсии ошибок $\sigma^2 = \mathbb{V}[\varepsilon]$, например $s^2 = \mathbf{e}^\intercal\mathbf{e}/n$ или $s^2 = \mathbf{e}^\intercal\mathbf{e}/(n-m)$. Остатки рассчитываются по обычной формуле $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{IV}}$. При этом следует помнить, что остатки, получаемые на втором шаге, тут не годятся, поскольку они равны $\mathbf{y} - \hat{\mathbf{X}}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{IV}}$. Если использовать их для расчета оценки дисперсии, то получим некорректную (обычно завышенную) оценку дисперсии и ковариационной матрицы. Отсюда следует, что из регрессии второго шага можно использовать только оценки коэффициентов. Стандартные ошибки и t-статистики требуется пересчитывать. Подробнее о проверке гипотез речь пойдет ниже, в пункте 5.1.

По-видимому, впервые метод инструментальных переменных был сформулирован в работе Wright (1928) как метод оценивания кривых спроса и предложения. Само название «инструментальные переменные» впервые употреблено в статье Reiersol (1941) при обсуждении модели ошибок в переменных. Метод получил развитие в работах Durbin (1954), Sargan (1958) и др. В контексте систем одновременных уравнений метод развивался параллельно под названием «двухшаговый МНК».

[9] См. Hansen (1982).

[10] Состоятельность доказывается по той же схеме, которая описана выше для обычного МНК.

3.2 Идентификация

Обсудим теперь проблему идентификации.[11] Какие условия должны выполняться, чтобы можно было вычислить оценки (13)?

Во-первых, матрица инструментов должна иметь полный ранг по столбцам ($\operatorname{rank}\mathbf{Z} = p$), иначе $(\mathbf{Z}^\intercal\mathbf{Z})^{-1}$ не существует. Это условие не столь важно, поскольку, на самом деле, значение имеет лишь матрица проекции $\mathbf{P}_\mathbf{Z}$, которую можно определить при любой $\mathbf{Z}$. Мы будем предполагать, что условие выполнено (если это не так, то всегда можно убрать часть инструментов, чтобы избавиться от линейной зависимости). Таким образом, в дальнейшем считаем, что $\operatorname{rank}\mathbf{Z} = p$.

Во-вторых, матрица $\mathbf{X}^\intercal\mathbf{Z}(\mathbf{Z}^\intercal\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^\intercal\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}}^\intercal\hat{\mathbf{X}}$ должна быть невырожденной. Это условие эквивалентно тому, что матрица $\hat{\mathbf{X}}$ имеет полный ранг по столбцам. Для этого необходимо, чтобы $\mathbf{X}$ имела полный ранг по столбцам, так как из $\operatorname{rank}\mathbf{X} < m$ следует $\operatorname{rank}\hat{\mathbf{X}} < m$. Условие $\operatorname{rank}\mathbf{X} = m$ – это стандартное условие идентификации для линейной регрессии, и мы в дальнейшем будем предполагать, что оно выполнено.

Далее, если количество инструментов меньше количества регрессоров ($p < m$), то, поскольку $\hat{\mathbf{X}}$ имеет неполный ранг (даже если $\operatorname{rank}\mathbf{X} = m$), оцениваемое уравнение *неидентифицируемо*, т. е. невозможно вычислить оценки (13). Таким образом, количество инструментов должно быть не меньше m (количество регрессоров). Если $p > m$, то говорят, что уравнение *сверхидентицировано.* Если количество инструментов равно m, то это *точная идентификация.* Если возможен случай сверхидентификации, то это обобщенный метод инструментальных переменных. При точной идентификации ($p = m$) получаем собственно классический метод инструментальных переменных.

Таким образом, необходимое условие идентификации имеет следующий вид:

$$p \geqslant m.$$

Это так называемое *порядковое условие* идентификации, условие на размерность матриц. Словесная формулировка порядкового условия:

> Количество инструментов $\mathbf{Z}$ должно быть не меньше количества регрессоров $\mathbf{X}$.

Заметим, что можно сначала «вычеркнуть» общие переменные в $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Z}$ и смотреть только на количество оставшихся. Количество оставшихся инструментов должно быть не меньше количества оставшихся регрессоров.

> Количество внешних инструментов $\mathbf{Z}^\dagger$ должно быть не меньше количества эндогенных регрессоров $\mathbf{X}^\star$,

т. е. $p^\dagger \geqslant m^\star$.

Почему это только необходимое условие? Пусть, например, некоторый регрессор $\mathbf{X}_j$ ортогонален $\mathbf{Z}$. Тогда $\hat{\mathbf{X}}_j = 0$, и невозможно получить оценки $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{IV}}$. Следовательно, данное условие не является достаточным. Необходимое и достаточное условие идентификации при конечном числе наблюдений формулируется следующим образом:

> Матрица $\hat{\mathbf{X}}$ имеет полный ранг по столбцам: $\operatorname{rank}\hat{\mathbf{X}} = m$.

Это так называемое *ранговое условие* идентификации.

Встречаются случаи, когда ранговое условие идентификации соблюдается, но матрица $\hat{\mathbf{X}}$ близка к вырожденности, т. е. в $\hat{\mathbf{X}}$ наблюдается мультиколлинеарность. Например, если инструменты $\mathbf{Z}$ являются слабыми для $\mathbf{X}_j$ в том смысле, что $\mathbf{X}_j$ и $\mathbf{Z}$ почти ортогональны, то $\hat{\mathbf{X}}$ близка к вырожденности.

[11] Идентификация в контексте метода инструментальных переменных тесно связана с идентификацией в контексте систем одновременных уравнений.

3.3 Где взять инструменты?

Самая трудная проблема в методе инструментальных переменных – это поиск подходящих инструментов. Требуется, чтобы инструменты были близко связаны с эндогенными регрессорами (или, другими словами, релевантными), но сами не были эндогенными.

Как мы видели в пункте 2.3, в модели ошибок в переменных ошибка регрессии имеет вид $\varepsilon = \varepsilon_0 - \mathbf{u}\boldsymbol{\beta}$, где ε_0 — ошибка в исходном уравнении, а $\mathbf{u}$ – ошибка измерения регрессоров $\mathbf{x}$. Чтобы переменные $\mathbf{z}$ можно было использовать в качестве инструментов, достаточно, чтобы $\mathbf{z}$ были некоррелированы с ε_0 и $\mathbf{u}$, но были связаны с $\mathbf{x}_0$. Например, это может быть, как и $\mathbf{x}$, некоторый неточный измеритель $\mathbf{x}_0$, но такой, что ошибки измерения $\mathbf{z}$ и $\mathbf{x}$ между собой не связаны.

Один из важных источников инструментов – это наблюдения за переменными из $\mathbf{x}^\star$, но произведенные в более ранний момент времени, другими словами, переменные из $\mathbf{x}^\star$ с лагом. Такое использование лагов для моделей временных рядов рассматривается в пункте 4.2. Для одномоментных (*cross-section*) данных использование запаздывающих значений регрессоров в качестве инструментов тоже актуально. К примеру, Evans, Froeb & Werden (1993) использовали для упоминавшейся выше модели влияния индекса концентрации на цены авиабилетов лаг индекса концентрации в качестве инструмента. При этом требуется иметь наблюдения за одними и теми же экономическими единицами в разные моменты времени, что предполагает использование так называемых панельных данных.

Лучше всего, когда инструментальные переменные до какой-то степени моделируют ситуацию проведения эксперимента, причем значения регрессоров устанавливаются случайным образом (когда, фактически, имеет место рандомизированный эксперимент). Даже если полный эксперимент невозможен, т. е. невозможно устанавливать значения регрессоров на произвольном желаемом уровне, часто возможно оказывать влияние на эндогенные регрессоры. При этом интенсивность влияния на переменную служит естественным инструментом для этой переменной. Если влияние со стороны исследователя в принципе невозможно, как это обычно и бывает в экономике, то может спонтанно возникнуть ситуация, когда внешние силы (природа или действия правительства) создают экзогенные флуктуации в объясняющих переменных. Подобную ситуацию принято называть *естественным экспериментом*.

Интересный случай инструментальных переменных – это инструментальные переменные, некоррелированность которых с ошибкой следует непосредственно из лежащей в основе эконометрической модели экономической теории (см., например, Hansen & Singleton, 1982).

В целом можно сказать, что очень редко когда используемые инструментальные переменные однозначно экзогенны. Часто исследователи выдвигают правдоподобные аргументы в пользу экзогенности переменных, но при более внимательном рассмотрении вполне может оказаться, что они чего-то не учли в своих рассуждениях. В частности, может обнаружиться, что переменная, которая казалась внешним инструментом, на самом деле должна быть одним из регрессоров. В таком случае инструментальная переменная становится пропущенной переменной, «уходит в ошибку», отчего ошибка становится коррелированной с «инструментом», и в результате инструмент является негодным, что приводит к несостоятельности оценок.

Если же инструменты вызывают мало подозрений с точки зрения экзогенности, то вполне вероятно, что они окажутся очень слабыми. В некотором смысле здесь существует обратная зависимость между слабостью инструмента и степенью сомнения в его экзогенности. Одна крайность здесь – это использование в качестве инструмента регрессора, экзогенность которого сомнительна, другая – это использование для получения инструмента датчика случайных чисел, который конечно, породит несомненно экзогенную переменную, но совершенно нерелевантную.

Найти однозначно годные и релевантные инструменты – это большая удача. Как бы то ни было, несмотря на все сложности и подводные камни, концепция инструментальных переменных является очень важной для эконометрического анализа.

4 Инструменты в различных моделях

4.1 Инструментальные переменные и системы одновременных уравнений

Метод инструментальных переменных – это широко используемый метод оценки параметров отдельного структурного уравнения в системе (линейных) одновременных уравнений, т. е. систем регрессионных уравнений, в которых часть переменных определяются внутрисистемно, или, другими словами, являются эндогенными (см., например, Theil, 1953, Basmann, 1957). В этом контексте он известен под названием двухшагового МНК.

Можно предполагать, что в основе метода инструментальных переменных лежит следующая модель:

$$\begin{aligned} y &= \mathbf{x}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon = \mathbf{x}^\circ\boldsymbol{\beta}^\circ + \mathbf{x}^\star\boldsymbol{\beta}^\star + \varepsilon, \\ \mathbf{x}^\star &= \mathbf{z}\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{v} = \mathbf{x}^\circ\boldsymbol{\Lambda}^\circ + \mathbf{z}^\dagger\boldsymbol{\Lambda}^\dagger + \mathbf{v}. \end{aligned} \tag{22}$$

В этой модели $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^\circ, \mathbf{z}^\dagger]$ – инструменты. Второе уравнение представляет собой линейную проекцию эндогенных регрессоров первого уравнения $\mathbf{x}^\star$ на инструментальные переменные $\mathbf{z}$. Такую систему уравнений называют системой уравнений с ограниченной информацией, поскольку акцент делается на оценивание лишь одного уравнения. Все остальные уравнения сводятся к приведенной форме и любые структурные ограничения, не относящиеся к рассматриваемому уравнению, игнорируются.

Близким к двухшаговому методу наименьших квадратов методом оценивания коэффициентов отдельного уравнения системы одновременных уравнений является метод максимального правдоподобия с ограниченной информацией (англ. *limited information maximum likelihood*, LIML). Метод был предложен в статье Anderson & Rubin (1949). Как можно продемонстрировать, если предположить нормальность ошибок в уравнении (22), отсутствие автокорреляции и условную гомоскедастичность ошибок $(\varepsilon, \mathbf{v})$, задача максимизации функции правдоподобия сводится к следующей задаче наименьшего дисперсионного отношения:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\tilde{\mathbf{y}}^\intercal \mathbf{M}_{\mathbf{X}^\circ}\tilde{\mathbf{y}}}{\tilde{\mathbf{y}}^\intercal \mathbf{M}_{\mathbf{Z}}\tilde{\mathbf{y}}} \to \min_{\boldsymbol{\beta}^\star} \\ \text{где } \tilde{\mathbf{y}} &= \tilde{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\beta}^\star) = \mathbf{y} - \mathbf{X}^\star\boldsymbol{\beta}^\star, \\ \mathbf{M}_{\mathbf{Z}} &= \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{Z}} = \mathbf{I} - \mathbf{Z}\big(\mathbf{Z}^\intercal\mathbf{Z}\big)^{-1}\mathbf{Z}^\intercal, \\ \mathbf{M}_{\mathbf{X}^\circ} &= \mathbf{I} - \mathbf{X}^\circ(\mathbf{X}^{\circ\intercal}\mathbf{X}^\circ)^{-1}\mathbf{X}^{\circ\intercal}. \end{aligned}$$

(Заметим попутно, что эту задачу можно записать несколько иначе, в виде задачи минимизации следующей «F-статистики» Андерсона–Рубина:

$$F(\boldsymbol{\beta}^\star) = \frac{\tilde{\mathbf{y}}^\intercal(\mathbf{M}_{\mathbf{X}^\circ} - \mathbf{M}_{\mathbf{Z}})\tilde{\mathbf{y}}/p^\dagger}{\tilde{\mathbf{y}}^\intercal\mathbf{M}_{\mathbf{Z}}\tilde{\mathbf{y}}/(n-p)} \to \min_{\boldsymbol{\beta}^\star}. \tag{23}$$

Эта статистика еще будет упоминаться в дальнейшем.)

В свою очередь, задача наименьшего дисперсионного отношения сводится к поиску минимального собственного значения некоторой матрицы. Если $\hat{\kappa}$ – соответствующее минимальное значение κ (или, что то же самое, наименьшее собственное значение), то оценки параметров $\boldsymbol{\beta}$ первого уравнения в (22) получаются по формуле

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{LIML}} = (\mathbf{X}^\intercal(\mathbf{I} - \hat{\kappa}\mathbf{M}_{\mathbf{Z}})\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\intercal(\mathbf{I} - \hat{\kappa}\mathbf{M}_{\mathbf{Z}})\mathbf{y}.$$

Несложно увидеть, что эти оценки имеют вид

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{LIML}} = (\hat{\mathbf{X}}^\intercal\mathbf{X})^{-1}\hat{\mathbf{X}}^\intercal\mathbf{y},$$

что совпадает с формулой (19), только в данном случае $\hat{\mathbf{X}} = (\mathbf{I} - \hat{\kappa}\mathbf{M_Z})\mathbf{X}$. Это означает, что в LIML используется несколько другая функция исходных инструментов $\mathbf{Z}$ по сравнению с двухшаговым МНК. С ростом количества наблюдений до бесконечности $\hat{\kappa}$ стремиться к единице и два метода оценивания сближаются.

При тех предположениях, которые лежат в основе LIML, оценки LIML и двухшагового МНК асимптотически эквивалентны и имеют одно и то же асимптотическое нормальное распределение. Однако их распределения в конечных выборках могут различаться, причем какой из методов дает более точные оценки нельзя сказать однозначно. Есть свидетельства, что в случае слабых инструментов или большого числа инструментов LIML предпочтительнее.

Примечательно, что классические методы оценивания систем одновременных уравнений, использующие полную информацию (трехшаговый МНК, FIML), также тесно связаны с методом инструментальных переменных и дают для отдельных уравнений оценки, которые представимы в виде (19) при соответствующем определении матрицы $\hat{\mathbf{X}}$.

4.2 Инструментальные переменные и модели временных рядов

Использование инструментальных переменных в моделях временных рядов можно рассмотреть на примере довольно общей модели ARMAX Бокса—Дженкинса:

$$y_t = \mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta} + \sum_{j=1}^{p} \varphi_j y_{t-j} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}. \tag{24}$$

В этой модели $\mathbf{X}_t$ – экзогенные регрессоры. Если рассматривать эту модель как регрессию, то в ней MA-ошибка коррелирована с лагами зависимой переменной. Мы уже видели это на примере частных случаев (8) и (10). Получить состоятельные оценки коэффициентов в этой модели можно с помощью метода инструментальных переменных. В качестве инструментов здесь естественно использовать $\mathbf{X}_t$ и лаги переменной y_t. Действительно, при $j > q$ переменная y_{t-j} не будет коррелировать с $\varepsilon_t, \ldots, \varepsilon_{t-q}$, и, следовательно, в целом с MA-ошибкой $\varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}$, поскольку будущие возмущения с точки зрения дальних лагов y_t представляют собой инновации. Полный набор инструментальных переменных для точной идентификации будет иметь вид

$$\mathbf{X}_t, y_{t-q-1}, \ldots, y_{t-q-p}.$$

Такой подход удобно использовать для получения начальных приближений параметров модели ARMA с целью последующего уточнения оценок другими, более эффективными, методами.

Можно использовать в качестве инструментов также лаги экзогенных переменных $\mathbf{X}_t$. В частности, регрессия (10) для модели Койка может оцениваться с помощью инструментов 1 (константы), x_t и x_{t-1}. Умножая уравнение (10) при $t = 2, \ldots, T$ на соответствующие значения инструментов, суммируя и зануляя сумму произведений ошибки и инструментов, получим следующую систему уравнений (аналог формулы (15)):

$$\begin{aligned}
\sum_{t=2}^{T} y_t &= (T-2)\mu' + \alpha \sum_{t=2}^{T} x_t + \delta \sum_{t=2}^{T} y_{t-1}, \\
\sum_{t=2}^{T} x_t y_t &= \mu' \sum_{t=2}^{T} x_t + \alpha \sum_{t=2}^{T} x_t^2 + \delta \sum_{t=2}^{T} x_t y_{t-1}, \\
\sum_{t=2}^{T} x_{t-1} y_t &= \mu' \sum_{t=2}^{T} x_{t-1} + \alpha \sum_{t=2}^{T} x_{t-1} x_t + \delta \sum_{t=2}^{T} x_{t-1} y_{t-1}.
\end{aligned}$$

Решив эти уравнения, найдем оценки метода инструментальных переменных для модели Койка.[12]

4.3 Нелинейный метод инструментальных переменных

Ранее мы предполагали, что оцениваемое уравнение регрессии имеет линейную функциональную форму. Однако, довольно часто отношения между экономическими переменными описываются как нелинейные. Рассмотрим, как следует модифицировать метод инструментальных переменных, чтобы его можно было использовать для оценивания нелинейных регрессий, в которых есть проблема эндогенности. Это *нелинейный метод инструментальных переменных*. Для него используют аббревиатуру NLIV (англ. *nonlinear instrumental variables*).

Инструментальные переменные для нелинейного метода инструментальных переменных, как правило, естественно брать тоже нелинейные. Пусть, к примеру, требуется оценить нелинейную потребительскую функцию:

$$C_i = \alpha + \beta Y_i^{\gamma} + \varepsilon_i.$$

Предположим, что ε_i коррелирована с Y_i, но не с лагами Y_{i-1}, Y_{i-2} или функциями от этих лагов. Тогда можно взять в качестве инструментов Y_{i-1}, Y_{i-2} и, например, их квадраты (или какие-то степени, близкие к вероятному γ). Вопроса оптимального выбора функциональной формы инструментальных переменных мы здесь не будем касаться.

Когда в правой части уравнения регрессии стоят эндогенные переменные, то различие между левой и правой частью уравнения регрессии стирается. Как следствие, можно рассматривать более широкий класс моделей, в котором в левой части стоит некоторая функция от «объясняемой» переменной y, «объясняющих» переменных $\mathbf{x}$ и от параметров. Более того, можно рассматривать модели следующего довольно общего вида:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e}(\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}),$$

где $\mathbf{y}$ отождествляется с зависимой переменной, $\mathbf{X}$ с регрессорами, а $\boldsymbol{\theta}$ – вектор неизвестных параметров. Относительно ошибки $\boldsymbol{\varepsilon}$ можно сделать стандартное предположение, что $\mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}] = \mathbf{0}$ и $\mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\varepsilon}] = \sigma^2\mathbf{I}_n$.

Один из примеров такой нелинейной функции – это регрессия Бокса–Кокса:

$$h(y_i, \lambda) = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

или

$$h(y_i, \lambda) = \beta_0 + \beta_1 h(x_i, \mu) + \varepsilon_i,$$

где

$$h(u, \lambda) = \begin{cases} (u^{\lambda} - 1)/\lambda, & \lambda \neq 0, \\ \ln(u), & \lambda = 0. \end{cases}$$

В качестве инструментов в такой регрессии (при экзогенности x_i) можно взять x_i или какие-то функции от x_i.

Пусть существует матрица инструментов $\mathbf{Z}$, для которой выполнено $\mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{Z}] = \mathbf{0}$ и $\mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{Z}] = \sigma^2\mathbf{I}_n$. Нелинейный метод инструментальных переменных состоит в том, чтобы минимизировать по параметрам $\boldsymbol{\theta}$ следующую функцию:

$$\mathbf{e}(\boldsymbol{\theta})^{\mathsf{T}}\mathbf{Z}(\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{e}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{e}(\boldsymbol{\theta})^{\mathsf{T}}\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}\mathbf{e}(\boldsymbol{\theta}), \tag{25}$$

[12] Ср. Liviatan (1963).

где, как и ранее, $\mathbf{P_Z} = \mathbf{Z}(\mathbf{Z}^\intercal\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^\intercal$ – матрица проекции на столбцы матрицы $\mathbf{Z}$. Обозначим через $\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta})$ матрицу первых производных (по $\boldsymbol{\theta}$) функции $\mathbf{e}(\cdot)$. В этих обозначениях условие первого порядка минимума имеет вид

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta})^\intercal\mathbf{P_Z}\mathbf{e}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}.$$

Минимизировать функцию (25) можно различными способами, но, по-видимому, наиболее удобный способ состоит в том, чтобы использовать следующую вспомогательную регрессию («искусственную регрессию» в терминологии Дэвидсона и Маккиннона, см. Davidson & MacKinnon, 2003):

$$\mathbf{e}(\boldsymbol{\theta}) \text{ на } -\mathbf{P_Z}\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}). \tag{26}$$

Имея некоторую текущую оценку параметров $\boldsymbol{\theta}$, следует построить такую регрессию и получить ней оценку коэффициентов. Эта оценка составит шаг итеративного алгоритма:

$$\Delta\boldsymbol{\theta} = -\big(\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta})^\intercal\mathbf{P_Z}\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta})\big)^{-1}\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta})^\intercal\mathbf{P_Z}\mathbf{e}(\boldsymbol{\theta}).$$

Новая оценка получается как $\boldsymbol{\theta}' = \boldsymbol{\theta}+\Delta\boldsymbol{\theta}$. Итеративный алгоритм останавливается, когда R^2 во вспомогательной регрессии оказывается меньше малого положительного числа. Вспомогательная регрессия дает корректную оценку ковариационной матрицы оценок: $s^2\mathbf{E}^\intercal\mathbf{P_Z}\mathbf{E}$, где $s^2 = \mathbf{e}^\intercal\mathbf{e}/(n-m)$ (можно использовать в качестве оценки дисперсии ошибок σ^2 и $s^2 = \mathbf{e}^\intercal\mathbf{e}/n$, поскольку обе оценки одинаково хороши в асимптотическом смысле).

5 Проверка гипотез и диагностика

5.1 Проверка гипотез о коэффициентах

Как обычно, при проверке гипотез о коэффициентах в случае, когда оценки имеют асимптотически нормальное распределение, можно использовать тест Вальда. Статистика Вальда для проверки нулевой гипотезы, о том, что коэффициенты регрессии удовлетворяют k линейным ограничениям $\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$ (где $\mathbf{R}$ – матрица $k \times m$, $\mathbf{r}$ – вектор длиной k), равна

$$W = (\mathbf{R}\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{IV}} - \mathbf{r})^\intercal\big(\mathbf{R}\hat{\mathbb{V}}(\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{IV}})\mathbf{R}^\intercal\big)^{-1}(\mathbf{R}\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{IV}} - \mathbf{r}).$$

Здесь, как и ранее, $\hat{\mathbb{V}}(\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{IV}}) = s^2(\mathbf{X}^\intercal\mathbf{P_Z}\mathbf{X})^{-1}$ – это оценка ковариационной матрицы оценок $\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{IV}}$. Эта статистика приближенно распределена как хи-квадрат со степенями свободы, равными числу ограничений, т. е. χ^2_k. Если W оказывается больше выбранного квантиля распределения χ^2_k, то нулевую гипотезу следует отвергнуть. При $k = 1$ более удобно использовать соответствующую z-статистику, т. е. статистику, которая приближенно распределена в соответствии со стандартным нормальным распределением, $N(0, 1)$. Если нулевая гипотеза состоит в том, что $\beta_j = \beta_j^*$, то z-статистика будет равна

$$z = \frac{\beta - \beta_j^*}{\sqrt{\hat{\mathbb{V}}(\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{IV}})_{jj}}}.$$

Описанная в пункте 4.3 вспомогательная («искусственная») регрессия является удобным инструментом проверки гипотез в методе инструментальных переменных. Можно использовать стандартные t- и F-статистики из этой регрессии. Распределения этих статистик будут похожи на t- и F-распределения соответственно. Такие тесты являются модификациями описанного теста Вальда и асимптотически ему эквивалентны. В случае линейной регрессии $-\mathbf{P_Z}\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta})$ в (26) принимает вид $\hat{\mathbf{X}}$.

5.2 Сверхидентифицирующие ограничения

Как проверить, что инструменты являются годными, т. е. что ошибки ε_i не коррелируют с инструментами $\mathbf{z}_i$? Вообще говоря, провести полную проверку этого условия невозможно, поскольку ошибки ε_i ненаблюдаемы. Но можно для проверки одних инструментов использовать другие инструменты. Для этого требуется иметь достаточно инструментов, необходима сверхидентификация.

Рассмотрим регрессию, которая включает *все* переменные, которые имеются в модели инструментальных переменных:

$$y = \mathbf{x}^\circ\boldsymbol{\beta}^\circ + \mathbf{x}^\star\boldsymbol{\beta}^\star + \mathbf{z}^\dagger\boldsymbol{\gamma}^\dagger + \varepsilon \tag{27}$$

или

$$y = \mathbf{x}^\star\boldsymbol{\beta}^\star + \mathbf{z}\boldsymbol{\gamma} + \varepsilon, \tag{28}$$

где $\boldsymbol{\gamma} = \left(\boldsymbol{\beta}^{\circ\mathsf{T}}, \boldsymbol{\gamma}^{\dagger\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}}$. Конечно, эта регрессия неидентифицирована, поскольку в ней не остается ни одного свободного инструмента. Чтобы ее оценить, мы по сути накладываем на часть коэффициентов $\boldsymbol{\gamma}$ ограничения, зануляя их. А именно, мы полагаем $\boldsymbol{\gamma}^\dagger = \mathbf{0}$. Это условие, что внешние инструменты $\mathbf{z}^\dagger$ не нужны для объяснения y и не влияют на него непосредственно, помимо $\mathbf{x}$.

В случае сверхидентификации, т. е. когда количество инструментов больше количества регрессоров ($p > m$), мы фактически накладываем на вектор $\boldsymbol{\gamma}$ больше ограничений, чем требуется для оценивания. Эти «лишние» $p - m$ ограничений принято называть *сверхидентифицирующими ограничениями* (англ. *overidentifying restrictions*). Можно проверить, выполнены ли эти дополнительные ограничения, или, иначе, нужны ли избыточные инструменты в регрессии. Пусть $\mathbf{z}^\ddagger$ – это некоторые $p - m$ из $p^\dagger = p - m^\circ$ внешних инструментов $\mathbf{z}^\dagger$. В этих обозначениях можем записать модель, которая точно идентифицирована при использовании $\mathbf{z}$ в качестве инструментальных переменных:

$$y = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{z}^\ddagger\boldsymbol{\gamma}^\ddagger + \text{ошибка}.$$

Нулевая гипотеза для *теста на сверхидентифицирующие ограничения* состоит в том, что $\boldsymbol{\gamma}^\ddagger = \mathbf{0}$. Ее следует проверять так же, как обычно проверяются ограничения на коэффициенты регрессии с инструментальными переменными (см. пункт 5.1).

Однако, есть более простой способ проверки сверхидентифицирующих ограничений. Он состоит в следующем. Исходная модель (т. е. модель при $\boldsymbol{\gamma}^\ddagger = 0$) оценивается методом инструментальных переменных и из нее берутся остатки $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{IV}}$. Далее строится регрессия остатков $\mathbf{e}$ на инструменты $\mathbf{Z}$. При нулевой гипотезе, что ошибки не коррелируют с инструментами, эта регрессия должна иметь незначительную объясняющую силу, что можно измерить с помощью (нецентрального[13]) коэффициента детерминации R_u^2. Таким образом, имеет смысл строить статистику для проверки гипотезы об экзогенности регрессоров на основе R_u^2. Как правило, используют статистику следующего вида:

$$nR_u^2.$$

Эта статистика имеет асимптотически распределение хи-квадрат с числом степеней свободы, равным числу «лишних» инструментов (сверхидентифицирующих ограничений), т. е. χ^2_{p-m}. Если статистика большая (больше критической границы), то следует сделать вывод, что среди инструментов есть неэкзогенные, т. е. негодные. Тест на сверхидентифицирующие ограничения был предложен в статье Basmann (1960).

[13]Т.е. такого, что в качестве знаменателя используется сумма квадратов *нецентрированной* зависимой переменной.

Следует отдавать себе отчет, что невозможно проверить годность каждого отдельного инструмента. Инструменты проверяются взаимно, друг относительно друга и только за счет сверхидентификации. В случае точной идентификации проверка годности инструментов принципиально невозможна, но если имеет место сверхидентификация, то можем подстраховаться. Таким образом, эта статистика является полезным инструментом диагностики. Но в любом случае то, что по крайней мере m инструментов являются экзогенными – это наша априорная гипотеза, которая не поддается проверке.

5.3 Тест Хаусмана

Если в уравнении (12) переменные $\mathbf{x}^\star$ не коррелированы с ошибкой, то не имеет смысла использовать метод инструментальных переменных с $\mathbf{z} = (\mathbf{x}^\circ, \mathbf{z}^\dagger)$ в качестве инструментов, а лучше оценить модель обычным МНК. Оценки обычного МНК $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}$ при экзогенности регрессоров являются более точными,[14] чем $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{IV}}$, поэтому, если нет опасности несостоятельности, то лучше использовать именно их. Таким образом, полезно уметь определять, когда следует использовать метод инструментальных переменных, а когда можно обойтись обычным МНК. Для этого можно использовать *тест Хаусмана*. (Его еще называют тестом Дарбина—Ву—Хаусмана, DWH, или тестом на эндогенность.[15])

Для того чтобы понять идею этого теста, рассмотрим линейную проекцию $\mathbf{x}^\star$ на $\mathbf{z}$, которая уже была введена выше (уравнение (22)):

$$\mathbf{x}^\star = \mathbf{z}\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{v}. \tag{29}$$

Это представление позволяет переформулировать условие применимости обычного МНК: с учетом того, что инструменты $\mathbf{z}$ некоррелированы с ошибкой исходного уравнения ε ($\mathbb{E}[\mathbf{z}\varepsilon] = \mathbf{0}$, инструменты экзогенны), переменные $\mathbf{x}^\star$ некоррелированы с ошибкой тогда и только тогда, когда ошибки $\mathbf{v}$ некоррелированы с ε, т. е. когда $\mathbb{E}[\mathbf{v}\varepsilon] = \mathbf{0}$.

Далее, введем линейную проекцию ε на $\mathbf{v}$:

$$\varepsilon = \mathbf{v}\boldsymbol{\tau} + r \tag{30}$$

По определению линейной проекции условие $\mathbb{E}[\mathbf{v}\varepsilon] = \mathbf{0}$ эквивалентно тому, что $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$. Подставив представление ошибки ε из (30) в исходное уравнение (12), получим:

$$y = \mathbf{x}^\circ\boldsymbol{\beta}^\circ + \mathbf{x}^\star\boldsymbol{\beta}^\star + \mathbf{v}\boldsymbol{\tau} + r = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{v}\boldsymbol{\tau} + r \tag{31}$$

Обычный МНК примени́м к исходной регрессии тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$. Ясно, что мы не можем оценить (31) непосредственно, поскольку ошибки уравнения (29) $\mathbf{v}$ ненаблюдаемы. Однако, мы можем получить оценки этих величин из регрессии первого шага двухшагового МНК (17), т. е. из регрессии, соответствующей модели (29).

Эти рассуждения подсказывают следующую процедуру проверки применимости обычного МНК.

1. Строим регрессию $\mathbf{X}^\star$ на инструментальные переменные $\mathbf{Z}$ и берем из этой регрессии остатки $\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{X}^\star - \hat{\mathbf{X}}^\star = \mathbf{M_Z}\mathbf{X}^\star$.

2. По аналогии с уравнением (31) строим регрессию $\mathbf{y}$ на $\mathbf{X}$ и $\hat{\mathbf{V}}$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \hat{\mathbf{V}}\boldsymbol{\tau} + \text{ошибка}.$$

[14] Это связано с тем, что разность $(\mathbf{X}^\intercal\mathbf{P_Z}\mathbf{X})^{-1} - (\mathbf{X}^\intercal\mathbf{X})^{-1}$ является положительно полуопределенной.
[15] Имеется в виду эндогенность переменных $\mathbf{x}^\star$.

3. Используем стандартную F-статистику[16] для проверки гипотезы $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ в этой последней регрессии (т. е. гипотезы, что коэффициенты при $\hat{\mathbf{V}}$ равны нулю). Если добавленные переменные $\hat{\mathbf{V}}$ оказываются незначимыми,[17] то следует принять нулевую гипотезу $\mathbb{E}[\mathbf{x}^\star\varepsilon] = \mathbf{0}$ и использовать обычный МНК для оценивания регрессии (12). В противном случае следует использовать метод инструментальных переменных.

Альтернативно, тест Хаусмана (и в этом состояла исходная идея Хаусмана, см. Hausman, 1978) может быть построен на сравнении оценок $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{IV}}$ с $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}$. Статистика Хаусмана основана на разности $\Delta = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{IV}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}$ и имеет вид квадратичной формы:

$$H = \Delta^{\mathsf{T}}\hat{\mathbb{V}}(\Delta)^{-1}\Delta,$$

где $\hat{\mathbb{V}}(\Delta)$ – оценка ковариационной матрицы разности Δ. Оказывается, что в данном случае $\hat{\mathbb{V}}(\Delta)$ имеет вид

$$\hat{\mathbb{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{IV}}) - \hat{\mathbb{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}),$$

где $\hat{\mathbb{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{IV}})$ – оценка ковариационной матрицы оценок $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{IV}}$, а $\hat{\mathbb{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}})$ – оценка ковариационной матрицы оценок $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}$. Оценки ковариационных матриц можно рассчитать по формулам

$$\hat{\mathbb{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}) = s^2(\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{X})^{-1}$$

и

$$\hat{\mathbb{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{IV}}) = s^2(\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}\mathbf{X})^{-1}.$$

Здесь s^2 – это оценка дисперсии ошибки. В качестве s^2 можно брать остаточную дисперсию, рассчитанную на основе либо оценок обычного МНК (s^2_{OLS}), либо метода инструментальных переменных (s^2_{IV}). Первый вариант (предложенный Дарбином, Durbin, 1954) более предпочтителен, поскольку использует более точную оценку и более устойчив к проблеме слабых инструментов.

Статистика Хаусмана имеет асимптотическое распределение хи-квадрат с $m^\star$ степенями свободы. Если статистика H большая (больше критической границы), то следует сделать вывод, что $\mathbb{E}[\mathbf{v}\varepsilon] \neq \mathbf{0}$. Если мы уверены в том, что инструментальные переменные $\mathbf{z}$ экзогенны, то это означает, что регрессоры $\mathbf{x}^\star$ коррелированы с ошибкой и мы должны использовать для оценивания метод инструментальных переменных. Если H мала, то оправдано использование обычного МНК.

6 Слабые инструменты

Выше было указано, что одно из требований к инструментам состоит в том, чтобы они были релевантными (достаточно сильно связанными с регрессорами) или, другими словами, не являлись слабыми. Желательно дать более точное определение данным понятиям. Прежде всего ясно, что переменные $\mathbf{x}^\circ$ по своей сути релевантны, поскольку они сами являются регрессорами. Таким образом, имеет смысл обсуждать релевантность только внешних регрессоров $\mathbf{z}^\dagger$. При этом имеет смысл говорить о связи внешних инструментов с эндогенными регрессорами $\mathbf{x}^\star$, причем о связи *в чистом виде, не опосредованной экзогенными регрессорами* $\mathbf{x}^\circ$. Так, если имеется единственная эндогенная переменная и единственный внешний инструмент, то речь должна идти о величине частной корреляции между ними относительно $\mathbf{x}^\circ$ (то есть корреляции между ними после устранения общих составляющих, объясняемых взаимодействием с $\mathbf{x}^\circ$).

[16] Если эндогенная переменная только одна, то можно использовать соответствующую t-статистику.

[17] Несложно понять, что те же результаты получатся, если добавлять $\hat{\mathbf{X}}^\star$, а не $\hat{\mathbf{V}}$, и проверять равенство нулю коэффициентов при $\hat{\mathbf{X}}^\star$.

Здесь удобно рассуждать в терминах регрессии первого шага двухшагового МНК (17). Если мы оценили эту регрессию и получили оценку $\hat{\mathbf{\Lambda}}^{\dagger}$ равную нулю, то, хотя внешние инструменты могут быть коррелированы с эндогенными регрессорами, но они ничего нового не дают по сравнению с экзогенными регрессорами, так что матрица проекции для всех инструментов, $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$, совпадет с матрицей проекции для экзогенных регрессоров, $\mathbf{P}_{\mathbf{X}^{\circ}} = \mathbf{X}^{\circ}(\mathbf{X}^{\circ\intercal}\mathbf{X}^{\circ})^{-1}\mathbf{X}^{\circ\intercal}$. В этом случае внешние инструменты фактически отсутствуют, и мы получаем неидентифицированное уравнение регрессии. Это случай, когда внешние инструменты являются полностью нерелевантными. На практике матрица $\hat{\mathbf{\Lambda}}^{\dagger}$ хотя и отличается от нуля, но часто оказывается очень малой. В этой ситуации, когда оценка $\hat{\mathbf{\Lambda}}^{\dagger}$ в определенном смысле близка к нулю, инструменты естественно назвать слабыми.

Такое определение слабых инструментов характеризует конкретные данные, с которыми мы имеем дело. Можно рассмотреть также его теоретический аналог. Для этого следует ввести теоретический аналог уравнения (17):

$$\mathbf{x}^{\star} = \mathbf{z}\mathbf{\Lambda} + \mathbf{v} = \mathbf{x}^{\circ}\mathbf{\Lambda}^{\circ} + \mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{\Lambda}^{\dagger} + \mathbf{v}. \tag{32}$$

С точки зрения этого уравнения инструменты будут слабыми в том случае, когда матрица теоретических коэффициентов $\mathbf{\Lambda}^{\dagger}$ в определенном смысле близка к нулю.

Известно, что если инструменты слабые, то это влечет много неприятных последствий для метода инструментальных переменных.

- Оценки метода инструментальных переменных оказываются неточными, и это проявляется в больших стандартных ошибках коэффициентов и широких доверительных интервалах, рассчитанных на основе оценки ковариационной матрицы (21). (Эта проблема тесно связана с мультиколлинеарностью в регрессии второго шага (18).)

- Стандартное асимптотическое приближение, согласно которому распределение разности оценок и истинных коэффициентов можно аппроксимировать нормальным распределением с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей (21), работает плохо. Во-первых, распределение оценок может очень существенно отличаться от нормального. Во-вторых, оценки метода инструментальных переменных могут быть сильно смещены. В-третьих, как правило, обычные доверительные области оказываются слишком «оптимистическими», преувеличивая точность оценок. Как следствие, обычные асимптотические доверительные области для параметров модели и оценки распределений тестовых статистик могут сильно «врать», т. е. их фактические коэффициенты покрытия (англ. *coverage rates*), могут существенно отличиться от номинального асимптотического уровня доверия.

- Когда инструменты слабые, оценки по методу инструментальных переменных смещены по направлению к (несостоятельным!) оценкам обычного метода наименьших квадратов. Когда инструменты очень слабые, то смещение двух видов оценок становится очень похожим. При этом вполне может возникнуть ситуация, когда смещение оценок по методу инструментальных переменных практически такое же, как и у оценок обычного МНК, а «разброс» оценок существенно больше, так что использование метода инструментальных переменных приводит к существенной потере точности оценок по сравнению с обычным МНК.

- Если инструменты слабые, то даже небольшое нарушение предположения о некоррелированности инструментальных переменных и ошибки регрессии может приводить к очень существенной несостоятельности оценок метода инструментальных переменных.

К этому следует добавить, что указанные проблемы могут усиливаться, когда при оценивании используется большое количество слабых инструментальных переменных, хотя согласно стандартной асимптотической теории добавление инструментов должно улучшать точность оценок.

Формально слабые в асимптотическом смысле инструменты можно задать как ситуацию, когда в регрессии первого шага матрица коэффициентов при внешних инструментах не является постоянной, а стремится к нулю со скоростью $\sqrt{n}$. Более точно, матрица $\mathbf{\Lambda}^\dagger$ в уравнении (32) моделируется как $\mathbf{\Lambda}^\dagger = \mathbf{C}/\sqrt{n}$, где $\mathbf{C}$ – постоянная матрица (см. Staiger & Stock, 1997). Такой альтернативный подход гарантирует, что инструменты остаются слабыми при стремлении количества наблюдений n к бесконечности. Он позволяет получить более корректную асимптотическую теорию. (Упрощенное изложение соответствующей теории можно найти в Анатольев, 2005, раздел 5.)

Один из способов решения проблемы слабых инструментов – построение доверительных областей, которые не основаны на стандартной асимптотической ковариационной матрице и асимптотической нормальности. Такие доверительные области могут быть, в частности, построены в рамках LIML на основе статистики Андерсона–Рубина (23). Этот и другие подобные подходы пока достаточно сложно использовать на практике.

Основной способ проверки того, являются ли инструменты слабыми, состоит в анализе коэффициентов детерминации и F-статистик в регрессиях (16) на первом шаге двухшагового МНК. Смотрим регрессии первого шага – насколько велики t- и F-статистики для проверки гипотез о равенстве коэффициентов при внешних инструментах нулю, насколько велики частные R^2 – влияние инструментов $\mathbf{Z}^\dagger$ на $\mathbf{X}^\star$ помимо $\mathbf{X}^\circ$ («очищенное» от этого влияния). Эмпирическим измерителем силы инструментов является F-статистика для гипотезы $\Lambda^\dagger = \mathbf{0}$ в регрессии первого шага. При $p = 1$ (единственный внешний инструмент) можно использовать t-статистику. Грубое рабочее правило для единственного эндогенного регрессора ($m^\star = 1$) состоит в том, что F-статистика меньше 10 должна вызывать озабоченность.

К сожалению, если имеется более одного эндогенного регрессора ($m^\star > 1$), то рассмотрения отдельных регрессий (16) может оказаться недостаточно. Cragg & Donald (1993) в этом случае предложили использовать матричный аналог F-статистики для гипотезы $\Lambda^\dagger = \mathbf{0}$:

$$\hat{\Sigma}_{vv}^{-1/2}\mathbf{X}^{\star\intercal}(\mathbf{M}_{\mathbf{X}^\circ} - \mathbf{M}_{\mathbf{Z}})\mathbf{X}^\star\hat{\Sigma}_{vv}^{-1/2}/p^\dagger,$$

где $\mathbf{M}_{\mathbf{X}^\circ}$ и $\mathbf{M}_{\mathbf{Z}}$ имеют то же значение, что и выше, а $\hat{\Sigma}_{vv} = \hat{\mathbf{V}}^\intercal\hat{\mathbf{V}}/(n-p) = \mathbf{X}^{\star\intercal}\mathbf{M}_{\mathbf{Z}}\mathbf{X}^\star/(n-p)$. Нулевую гипотезу о нерелевантности инструментов предлагается проверять на основе статистики, равной минимальному собственному значению этой матричной статистики.

В заключение упомянем характерный (и ставший хрестоматийным) пример исследования, в котором используются слабые инструменты. Это статья Angrist & Krueger (1991), в которой изучалась отдача от образования в духе минцеровской регрессии (3). Ангрист и Крюгер заметили, что из-за особенностей законодательства США, относящегося к обязательному образованию, длительность обучения человека зависит от того, в какое время года он родился. По-видимому, квартал рождения случайно распределен между людьми и не зависит от того, в какой обстановке родился индивидуум, какие у него были родители, и т. д. Если это так, и квартал рождения влияет на заработки только через время обучения, то он является годным инструментом. Таким образом, ситуация, фактически, похожа на естественный эксперимент. Хотя эффект зависимости от квартала не очень сильный, но, поскольку имелось очень большое количество наблюдений, его все же можно уловить. Он хорошо виден из Рис. 2 (слева) – данные там усреднены по людям, родившимся в конкретный квартал конкретного года. В зарплате человека также видна зависимость от времени года, в которое он родился (см. Рис. 2 справа). Таким образом, статистическая значимость связи и, следовательно, релевантность инструментов не вызывает сомнений.

В типичной постановке в качестве внешних инструментов использовались фиктивные переменные для квартала рождения (3 переменных) и фиктивные переменные для сочетания квартала рождения и года рождения ($3 \times 9 = 27$ переменных). Две переменных исключа-

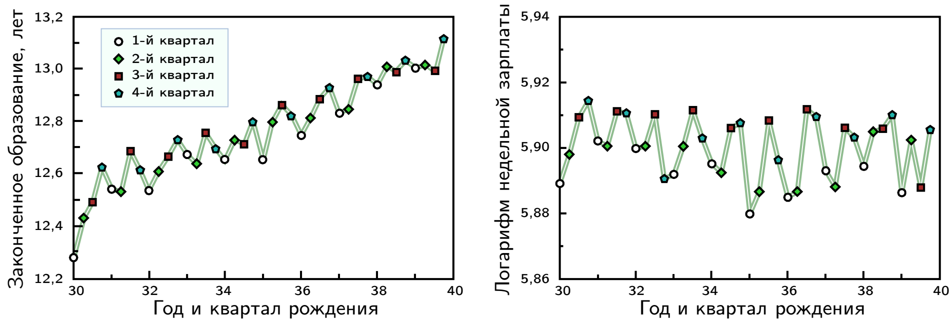

Рис. 2: Иллюстрации к статье Angrist & Krueger (1991) – обоснование использования квартала рождения в качестве инструмента

лись из-за линейной зависимости, когда в модель включались в качестве объясняющих переменных возраст и возраст в квадрате. В этом случае всего было использовано 28 внешних инструментов.

Bound, Jaeger & Baker (1995) обратили внимание на слабость использованных Ангристом и Крюгером инструментов. При использовании данных о 329509 мужчинах 1930–1939 годов рождения в регрессии первого шага (зависимая переменная – образование, регрессоры – все имеющиеся инструментальные переменные) частный R-квадрат для внешних инструментов равен 0,014%, а F-статистика для гипотезы о равенстве нулю коэффициентов при внешних инструментах составила 1,613 при уровне значимости 0,021. Таким образом, F-статистика близка к своему ожидаемому значению 1. Баунд, Джегер и Бейкер указали на то, что если заменить инструменты, использованные в статье, на случайным образом сгенерированные (и не имеющие никакого отношения к данным), то результаты будут похожи те, что представлены в этой статье.

Ангрист и Крюгер в регрессии логарифма зарплаты на образование (измеряемое годами обучения) и другие переменные получили оценку 0,0632 для коэффициента при образовании (аналог коэффициента β_1 в уравнении (3)) со стандартной ошибкой 0,0003 при использовании обычного МНК, и оценку 0,0600 со стандартной ошибкой 0,0299 при использовании метода инструментальных переменных. Баунд, Джегер и Бейкер в серии из 500 экспериментов со случайно сгенерированными «кварталами» получили средний коэффициент 0,061 и среднеквадратическое отклонение коэффициента 0,039. Учитывая низкое значение F-статистики, можно сделать вывод, что не представляет труда сымитировать результаты Ангриста и Крюгера, пользуясь полностью нерелевантными инструментами.

Staiger & Stock (1997) также рассмотрели эти данные и убедились, применив разработанные ими асимптотические методы, что инструменты действительно очень слабые, и что использование обычного асимптотического приближения в данном случае не оправдано. Полученная ими альтернативная 95%-я интервальная оценка на основе статистики Андерсона–Рубина для коэффициента при образовании по тем же данным и той же модели равна $[-0{,}441; 0{,}490]$. Такая неточная оценка вряд ли может представлять какой-то интерес.

По-видимому, эти результаты (помимо демонстрации применения современных методов для слабых инструментов) в основном говорят о том, что не следует включать в регрессию большое количество очень слабых инструментов. Для упомянутых данных (329509 мужчин 1930–1939 годов рождения) зависимость длительности обучения от квартала очевидна. В то же время, авторы первоначальной статьи необоснованно добавили большое количество дополнительных инструментов, наличие связи которых с длительностью обучения никак не подтверждается имеющимися данными – это фиктивные переменные для взаимодействия года рождения и квартала рождения. Включение этих переменных имело бы смысл, если бы сезонность на Рис. 2 очевидным образом менялась бы в зависимости от года рождения. Но никакого изменения структуры сезонности не заметно. Таким образом, эти дополнительные инструменты не дают ничего, кроме дополнительного шума.

7 Пример использования метода инструментальных переменных

Статья Cutler & Glaeser (1997) представляет собой типичный пример использования инструментальных переменных в исследовании по прикладной микроэкономике. Авторы поставили задачу выяснить, как влияет расовая сегрегация на благосостояние чернокожих американцев. На уровне отдельных индивидуумов наблюдается закономерность, что чернокожие, живущие в окружении чернокожих, менее успешны, чем чернокожие, живущие в преимущественно белом окружении. Но такая связь может объясняться тем, что происходит самоотбор успешных чернокожих, перемещение их в более благополучные районы с преимущественно белым населением. Чтобы избежать этой проблемы, Катлер и Глэсер решили использовать в регрессии данные по отдельным индивидуумам, но в качестве объясняющей переменной взять данные о сегрегации в среднем по городу, в котором живет индивидуум. Другими словами, они изучали вопрос о том, более или менее успешны расовые меньшинства *в целом* в тех городах, где расовая сегрегация более сильна, по сравнению с теми городами, где расовая сегрегация менее сильна.

Базовая модель регрессии в статье имеет вид

$$Succ = \beta_1 Segr + \beta_2 Segr \cdot Black + \textit{прочие факторы} + \varepsilon.$$

Здесь $Succ$ – показатель успешности для индивидуума, $Segr$ – измеритель сегрегации в городе, $Black$ – фиктивная переменная для чернокожих. Коэффициент β_1 измеряет влияние сегрегации на белых, а коэффициент β_2 – разницу между влиянием сегрегации на чернокожих и на белых. Для авторов наибольший интерес представлял коэффициент β_2. Использованные данные[18] относятся к 1990 г.

При указанном подходе к измерению сегрегации все еще остается проблема самоотбора (в данном случае уже из-за перемещения между городами), но проблема становится менее острой. Появляется также проблема обратной причинности: меньшая успешность чернокожих может вести к большей сегрегации. Чтобы решить проблему обратной причинности, авторы использовали инструментальные переменные для сегрегации. Инструменты подбирались так, чтобы они оказывали влияние на сегрегацию, но чтобы показатели успешности чернокожих не оказывали на них влияния. Использованы два разных набора инструментов.

Первый набор инструментальных переменных отражает структуру местных финансов. Используются два таких инструмента: количество местных органов власти, входящих в данный город, и доля доходов местного бюджета, поступающих из бюджетов более высокого уровня (уровня штата и федерального правительства). Авторы исходили из того, что количество местных органов власти может влиять на сегрегацию через механизм Тибу: когда имеется много органов власти, ставки налогов и уровень муниципальных услуг сильнее варьируются в пределах города, что способствует сегрегации. Аналогично, если меньше денег приходит «сверху», то местные налоги должны быть выше, так что расовые меньшинства в большей степени заинтересованы в том, чтобы выиграть на образующейся разнице ставок налогов, что усиливает сегрегацию.

Количество местных органов власти в пределах района незначительно меняется с течением времени, поэтому его можно считать экзогенным для сегрегации. Чтобы снять все подозрения по поводу направления причинности, авторы использовали данные за 1962 г. в качестве инструмента. Доля доходов местных бюджетов, которая приходит от властей штата и федерального правительства, может быть коррелирована с местными условиями. Чтобы удалить местную эндогенную составляющую из этого показателя, авторы берут среднее по штату, а

[18] Данные можно найти на странице *http://trinity.aas.duke.edu/~jvigdor/segregation/index.html*.

не по отдельному городу. При таком выборе показателя он оказывается связанным с политическими характеристиками штата, а не отдельного города. Данные для этого инструмента также взяты за 1962 г., чтобы еще в большей степени ослабить эндогенность. (Этот показатель заметно менялся со временем, но все же корреляция между уровнями 1962 г. и 1987 г. года достаточно высокая: $\rho = 0{,}55$).

В регрессии сегрегации на эти две инструментальные переменные коэффициент детерминации равен $R^2 = 31{,}2\%$, t-статистики равны 8,8 и $-2{,}4$ соответственно[19] (это регрессия по городам). Поскольку в базовую регрессию включена сегрегация и сегрегация, умноженная на фиктивную переменную для расы, то фискальные инструментальные переменные также берутся как сами по себе, так и их произведения с фиктивной переменной для расы.

Второй набор инструментов основан на топографических особенностях города – это количество рек, протекающих внутри округов, и количество рек, протекающих между округами. Использование этих двух показателей в качестве инструментов для сегрегации объясняется тем, что реки служат естественными преградами, разделяя города на части и создавая предпосылки для сегрегации.[20] Были включены также квадраты количества рек, чтобы учесть возможные нелинейные связи между количеством рек и сегрегацией. В регрессии сегрегации на указанные четыре «топографические» инструментальные переменные коэффициент детерминации оказался равным $R^2 = 19{,}8\%$.

Трудно сказать, достаточно ли «сильные» инструменты использованы в этом исследовании, но очевидно, что они значимо связаны с сегрегацией. Поскольку инструментальных переменных много, а эндогенных переменных всего две, то для контроля качества инструментов можно использовать тест на сверхидентифицирующие ограничения (см. пункт 5.2). Действительно, авторы статьи провели такой тест, и оказалось, что инструменты не прошли проверки. Это может объясняться тем, что нарушены предположения, лежащие в основе теста на сверхидентифицирующие ограничения, например, имеет место автокорреляция ошибок регрессии. Но в целом это заставляет с определенной настороженностью относится к результатам исследования.

Используя самые разные переменные в качестве показателя успешности индивидуумов, Катлер и Глэсер обнаружили, что чернокожие существенно менее успешны в расово сегрегированных городах: уменьшение сегрегации на одно среднеквадратическое отклонение уменьшает примерно на одну треть различие между черными и белыми по большинству из показателей.

8 Резюме

- Возможные причины корреляции между регрессорами и ошибкой регрессии – это пропущенные переменные, ошибки в переменных, двусторонняя причинность, использование лага зависимой переменной в условиях автокорреляции.

- Если регрессор и ошибка коррелированы, обычный метод наименьших квадратов дает несостоятельные и асимптотически смещенные оценки. В этом случае метод инструментальных переменных позволяет получить состоятельные оценки.

- Инструментальная переменная не должна быть коррелирована с ошибкой и должна быть коррелирована с эндогенными переменными оцениваемой регрессии.

- Метод инструментальных переменных, фактически, лежит в основе некоторых известных методов статистического оценивания. Метод инструментальных переменных (с мо-

[19] В статье t-статистики не приведены, а приведены стандартные ошибки.
[20] Этот прием первоначально использовала К. Хоксби. Ср. Hoxby (2000).

дификациями) может использоваться для получения состоятельных оценок в самых разных эконометрических моделях.

- Слабые инструменты могут приводить к серьезным проблемам при точечном и интервальном оценивании и при проверке гипотез.

- Поиск годных и релевантных инструментов – это задача, которая требует большой изобретательности. Найти однозначно годные и релевантные инструменты – это большая удача.

9 Дальнейшее чтение

Материал, близкий к тому, что обсуждается в данном эссе, содержится практически во всех эконометрических учебниках. В частности, можно порекомендовать Hayashi (2000, гл. 3), Davidson & MacKinnon (2003, гл. 8), Ruud (2000, гл. 20), Wooldridge (2002, гл. 4, 5 и 6), Cameron & Trivedi (2005, гл. 4). Существует монография Bowden & Turkington (1984), посвященная инструментальным переменным (хотя и несколько устаревшая).

Разнообразные сведения о методе инструментальных переменных можно почерпнуть из статей Angrist & Krueger (2001), Stock (2001), Baum, Schaffer & Stillman (2003). Обзор оценивания в условиях слабости инструментов можно найти в Stock, Wright & Yogo (2002) и Паган (2007).

Список литературы

Анатольев, С.А. (2005). Асимптотические приближения в современной эконометрике. *Экономика и математические методы* 41, 84–94.

Паган, А. (2007). Слабые инструменты. *Квантиль* 2, 71–81.

Anderson, T.W. & H. Rubin (1949). Estimation of the parameters of a single equation in a complete system of stochastic equations. *Annals of Mathematical Statistics* 20, 46–63.

Angrist, J.D. & A.B. Krueger (1991). Does compulsory school attendance affect schooling and earning? *Quarterly Journal of Economics* 106, 979–1014.

Angrist, J.D. & A.B. Krueger (2001). Instrumental variables and the search for identification: From supply and demand to natural experiments. *Journal of Economic Perspectives* 15, 69–85.

Basmann, R.L. (1957). A general classical method of linear estimation of coefficients in a structural equation. *Econometrica* 25, 77–83.

Basmann, R.L. (1960). On finite sample distributions of generalized classical linear identifiability test statistics. *Journal of the American Statistical Association* 55, 650–659.

Baum, C.F., M.E. Schaffer & S. Stillman (2003). Instrumental variables and GMM: Estimation and testing. *Stata Journal* 3, 1–31.

Bound, J., D.A. Jaeger & R.M. Baker (1995). Problems with instrumental variables estimation when the correlation between the instruments and the endogenous explanatory variable is weak. *Journal of the American Statistical Association* 90, 443–450.

Bowden, R. & D. Turkington (1984). Instrumental Variables. Cambridge: Cambridge University Press.

Cameron, A.C. & P.K. Trivedi (2005). Microeconometrics: Methods and Applications. Cambridge: Cambridge University Press.

Cragg, J.G. & S.G. Donald (1993). Testing identifiability and specification in instrumental variable models. *Econometric Theory* 9, 222–240.

Cutler, D.M. & E.L. Glaeser (1997). Are ghettos good or bad? *Quarterly Journal of Economics* 112, 827–872.

Davidson, R. & J.G. MacKinnon (2003). Econometric Theory and Methods. Oxford University Press.

Durbin, J. (1954). Errors in variables. *Review of Institute of International Statistics* 22, 23–54.

Evans, W.N., L.M. Froeb & G.J. Werden (1993). Endogeneity in the concentration–price relationship: Causes, consequences, and cures. *Journal of Industrial Economics* 41, 431–438.

Hansen, L. (1982). Large sample properties of generalized method of moments estimators. *Econometrica* 50, 1029–1054.

Hansen, L.P. & K.J. Singleton (1982). Generalized instrumental variables estimation of nonlinear rational expectations models. *Econometrica* 50, 1269–1286.

Hausman, J. (1978). Specification tests in econometrics. *Econometrica* 46, 1251–1271.

Hayashi, F. (2000). Econometrics. Princeton: Princeton University Press.

Hoxby, C.M. (2000). Does competition among public schools benefit students and taxpayers? *American Economic Review* 90, 1209–1238.

Liviatan, N. (1963). Consistent estimation of distributed lags. *International Economic Review* 4, 44–52.

Mincer, J. (1958). Investment in human capital and personal income distribution. *Journal of Political Economy* 66, 281–302.

Reiersøl, O. (1941). Confluence analysis by means of lag moments and other methods of confluence analysis. *Econometrica* 9, 1–23.

Ruud, P.A. (2000). An Introduction to Classical Econometric Theory. New York: Oxford University Press.

Sargan, J.D. (1958). The estimation of economic relationships using instrumental variables. *Econometrica* 26, 393–415.

Staiger, D. & J.H. Stock (1997). Instrumental variables regression with weak instruments. *Econometrica* 65, 557–586.

Stock, J.H. (2001). Instrumental variables in statistics and econometrics. Глава в *International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences* под редакцией N.J. Smelser & P.B. Baltes, 7577–7582. Amsterdam: Elsevier.

Stock, J.H., J. Wright & M. Yogo (2002). A survey of weak instruments and weak identification in generalized method of moments. *Journal of Business & Economic Statistics* 20, 518–529.

Theil, H. (1953). Repeated least-squares applied to complete equation systems. Discussion paper, Central Planing Bureau, Hague.

Wooldridge, J. (2002). Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data. Cambridge: MIT Press.

Working, E.J. (1927). What do statistical “demand curves” show? *Quarterly Journal of Economics* 41, 212–235.

Wright, P.G. (1928). The Tariff on Animal and Vegetable Oils. New York: Macmillan.

A guide to the world of instruments

Alexander Tsyplakov

Novosibirsk State University, Novosibirsk

The essay discusses reasons of correlatedness of explanatory variables and errors in regression applications, consequences of this correlatedness, and the method of instrumental variables aimed to resolve this problem.