Долгосрочная связь временных рядов и паритет покупательной способности*

Олег Обрезков†

ВРГ Инвестментс, Москва

В статье исследуется гипотеза паритета покупательной способности для США и Японии. Инструментарием для исследования является оценивание параметров дробной интеграции для временных рядов ценовых индексов и обменных курсов. Из результатов оценивания можно заключить, что номинальный и реальный обменные курсы хорошо описываются традиционными $I(1)$-процессами, в то время как ряды ценовых индексов как в США, так и в Японии оказываются $I(1{,}46)$. Наш подход отличается от традиционного, рассматривающего ряды агрегированных ценовых индикаторов как нестационарные процессы второго порядка. Точечная оценка порядка дробной интеграции для логарифмической разницы ценовых индексов США и Японии равна 1,33, что статистически ниже, чем значение 1,46, полученное для ценовых индексов каждой из стран. Этот результат может быть интерпретирован как (очень слабое) подтверждение гипотезы паритета покупательной способности: дробный порядок отношения ценовых индексов меньше, чем дробный порядок каждого из индексов.

Ключевые слова: паритет покупательной способности, обменные курсы, дробная интеграция

Классификация JEL: C22, F31, F41

1 Долгосрочная связь макроэкономических временных рядов и дробная интеграция

Анализ временных рядов с долгосрочной связью представляет не только теоретический интерес. Некоторые эмпирические наблюдения позволяют заключить, что длинная память – сильная зависимость между отдаленными наблюдениями – присутствует в многих макроэкономических временных рядах. Классическим примером такой временной динамики является ВВП США. До 80-х годов было принято моделировать подобные данные в виде детерминистического тренда с вре́менными стохастическими отклонениями. Однако Nelson & Plosser (1982) обнаружили, что поведение логарифма ВВП лучше описывается моделью нестационарного временного ряда, так что стохастический процесс для логарифма ВВП имеет единичный корень. Более того, Campbell & Mankiw (1987) вывели оптимальную ARIMA-модель для логарифма ВВП, и оказалось, что 1%-ный шок в ВВП приводит к изменению догосрочного прогноза более чем на 1%. Таким образом, можно было сделать вывод, что временной ряд ВВП США содержит нетривиальную устойчивую компоненту.

Дальнейшее моделирование макроэкономических данных во многом опирается на тесты на единичные корни. Следует отметить некоторые недостатки такого подхода. После того как тестовые статистики вычислены, перед исследователем стоит непростой выбор: моделировать ряд как $I(0)$- или как $I(1)$-процесс. Очевидно, что результат выбора по существу определяет дальнейшие выводы. Например, долгосрочный эффект единичного шока на стационарный (т.е. $I(0)$) процесс равен нулю. Более того, моделирование такого процесса с помощью методологии Бокса–Дженкинса приводит к тому, что функции импульсного отклика

*Цитировать как: Обрезков, Олег (2007). «Долгосрочная связь временных рядов и паритет покупательной способности», Квантиль, №2, стр. 131–140. Citation: Obrezkov, Oleg (2007). "Long range dependence and the purchasing power parity," Quantile, No.2, pp. 131–140.

†Адрес: 115035, г. Москва, Садовническая набережная, 77/1. Электронная почта: *oobrezkov@yandex.ru*

и автокорреляции стремятся к нулю с геометрической скоростью. С другой стороны, нестационарный (т.е. $I(1)$) процесс имеет ненулевые долгосрочные функции импульсного отклика и не имеет конечной дисперсии.

Следовательно, выбор между $I(0)$ и $I(1)$ является ключевым и часто его непросто сделать (если, например, тестовая статистика близка к критическому значению). Возникающий в связи с этим вопрос «дифференцировать или не дифференцировать временной ряд»[1] можно переформулировать как выбор оптимальной $I(d)$-модели среди *дискретного* множества параметров $d \in \{0, 1\}$. Естественным обобщением такого моделирования, позволяющего оптимизировать выбор по d из множества действительных чисел, является модель дробной интеграции. Формальная запись этой модели такова:

$$(1-L)^d y_t = \epsilon_t, \tag{1}$$

где ϵ_t – белый шум, L – лаговый оператор, а d – произвольное действительное число. Отметим, что y_t при $d=0$ – белый шум, т.е. $I(0)$-процесс, а при $d=1$ – случайное блуждание, т.е. $I(1)$-процесс. Для произвольного действительного d y_t называется дробноинтегрированным белым шумом порядка d. Для того, чтобы придать точное значение (1) в случае нецелого d, применим к обеим частям (1) оператор $(1-L)^{-d}$ и формально разложим этот оператор в ряд по степеням L:

$$(1-L)^{-d} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-d)\dots(-d-j+1)}{j!}(-L)^j = \sum_{j=0}^{\infty} h_j L^j,$$

где $h_j = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j+1)}$ и $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера. Тогда представление Вольда для y_t есть

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} h_j \epsilon_{t-j}. \tag{2}$$

Следующая теорема содержит основные свойства $I(d)$-процесса. Эти результаты были получены в Hosking (1981).

Теорема 1. *(а) Если $d < \frac{1}{2}$, то y_t – стационарный процесс; кроме того, $\sum_j h_j^2 < \infty$, так что y_t стационарен в ковариациях, и правая часть (2) сходится в L^2.*

(б) Если $d > -\frac{1}{2}$, то разложение (2) обратимо.

(в) Если $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$, то ковариационная функция y_t равна $\gamma_k = \frac{\Gamma(1-2d)\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)\Gamma(k+1-d)}\sigma_\epsilon^2$, а корреляционная функция $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$ ведет себя при $k \to \infty$ как $\rho_k \sim \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} k^{2d-1}$.

Отметим, что условия $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$ всегда можно добиться, применив необходимое количество обычных дифференцирований. При $d > \frac{1}{2}$ процесс нестационарен. Вслед за работой Diebold & Rudebusch (1989) мы рассмотрим обобщение процессов с единичным корнем для случая, когда d принадлежит интервалу $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$; первая разность такого временного ряда стационарна и обратима. В отличие от стандарных тестов на единичные корни, которые дают лишь ответ типа «да/нет» на вопрос о существовании долгосрочной устойчивой компоненты во временном ряде, мы можем измерить «уровень нестационарности» – чем выше d, тем больше долгосрочная устойчивая компонента. Теорема 1 также утверждает, что даже при $0 < d < \frac{1}{2}$ дробноинтегрированный процесс имеет более длинную память, чем традиционный ARMA-процесс. Автокорреляции ARMA убывают с геометрической скоростью, в то время как дробноинтегрированный процесс убывает с более медленной гиперболической скоростью. При $0 < d < \frac{1}{2}$ ряд $\sum_j \rho_j$ расходится, и можно сказать, что такой процесс имеет долгосрочную память.

[1]См. Hamilton (1994, стр. 651–653), где этот вопрос подробно обсуждается.

Естественным обобщением дробноинтегрированного процесса является комбинация вышеописанной модели с семейством процессов Бокса–Дженкинса. Процесс y_t носит название $\mathsf{ARFIMA}(p,d,q)$, если он может быть представлен в виде

$$\Phi(L)(1-L)^d y_t = \Theta(L)\epsilon_t,$$

где $\Phi(L) = 1-\phi_1 L - \ldots - \phi_p L^p$ и $\Theta(L) = 1-\theta_1 L - \ldots - \theta_q L^q$ – конечные лаговые полиномы, ϵ_t) – белый шум, и предполагается, что все корни $\Phi(z)\Theta(z) = 0$ по модулю превосходят единицу. Утверждение, аналогичное Теореме 1, может быть доказано для ARFIMA-процессов. Случай $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$ вновь приводит к стационарности и обратимости, а автокорреляции убывают с гиперболической скоростью.

Практическое применение ARFIMA-моделей в макроэкономике было впервые показано в Granger (1980). Оказывается, что дробноинтегрированные процессы могут появиться в результате макроагрегирования традиционных стационарных временных данных. Если j-ая индивидуальная переменная следует AR(1)-процессу с автокорреляцией ρ_j, а параметры ρ_j имеют бета-распределение, то ряд из агрегированных данных будет дробноинтегрированным. Diebold & Rudebusch (1989) оценили порядок дробной интеграции для различных макроэкономических данных (включая данные по ВВП США из Campbell & Mankiw, 1987) и получили оценки в диапазоне (0,6; 0,9). Тем не менее, ни в одном из рассматриваемых случаев гипотеза $d = 1$ не была отвергнута на 5%-ном уровне значимости, так как в анализе использовалась неточная методика оценивания Geweke & Porter-Hudak (1983).

2 Методы оценивания ARFIMA-моделей

Обычно для оценивания параметров дробноинтегрированных процессов используется спектральное разложение процесса. Везде далее предполагается, что все процессы имеют нулевое среднее. Напомним, что спектральная плотность $f(\cdot)$ процесса y_t неявно определяется системой равенств $\gamma(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda)d\lambda$, где $\gamma(\cdot)$ – корреляционная функция. Можно показать, что для ARFIMA-процесса

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi}|1-e^{-i\lambda}|^{-2d}\frac{|\Theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\Phi(e^{-i\lambda})|^2}. \tag{3}$$

Кроме этого, определим периодограмму y_t на частоте λ равенством

$$I(\lambda) = \frac{1}{2\pi T}\left|\sum_{t=1}^{T} e^{it\lambda} y_t\right|^2,$$

где T – размер выборки.

Сначала необходимо оценить параметр d дробной интеграции. Этот параметр хорошо определен частью (в) Теоремы 1. Теоретически, можно регрессировать логарифм корреляционной функции ρ_k на константу и логарифм k для больших k и получить $(2\hat{d}-1)$ как оцененный коэффициент при логарифме k. Однако этот подход нельзя применить на практике из-за конечности выборки. Вместо этого можно использовать известный факт из анализа Фурье о том, что поведение $f(x)$ для больших $|x|$ сильно связано с поведением преобразования Фурье этой функции в окрестности нуля. Эта идея, в частности, была использована для вывода оценки d в Geweke & Porter-Hudak (1983, в дальнейшем GPH).

Технически оценка GPH получается из регрессии

$$\ln\left(I(\lambda_j)\right) = \beta_0 + \beta_1 \ln\left(|1-e^{-i\lambda_j}|^2\right) + \eta_j, \quad j = 1,\ldots,K, \tag{4}$$

где $I(\cdot)$ – периодограмма процесса, $\lambda_j = \frac{2\pi j}{T}$, и $K = g(T)$. Также предполагается, что при $T \to \infty$, $g(T) \to \infty$ (это необходимо для состоятельности оценок) и $g(T)/T \to 0$, так что регрессия (4) оценивается только для маленьких частот.[2] Geweke & Porter-Hudak (1983) показали, что при вышеуказанных условиях МНК-оценка $-\hat{\beta}_{1,OLS}$ является состоятельной для d. Кроме того, асимптотическая дисперсия регрессионной ошибки η_j равна $\frac{\pi^2}{6}$. Следовательно, оценка дисперсии $\hat{\beta}_{1,OLS}$ задается формулой $\frac{\pi^2}{6}\left[(X'X)^{-1}\right]_{22}$, где X – матрица регрессоров (4), и асимптотическое распределение нормально. Тем не менее, следует заметить, что скорость сходимости $\sqrt{g(T)}$ медленнее, чем традиционная $\sqrt{T}$, из-за того что $g(T)/T \to 0$.

Для того чтобы оценить все параметры ARFIMA-модели, можно применить двухшаговую GPH-процедуру: сначала оценить d из (4), затем построить новый ряд $(1-L)^{\hat{d}}y_t$ и применить обычную методологию Бокса–Дженкинса к этому ряду. Этот подход далек от оптимального, так как он сильно урезает временной ряд. Sowell (1992) с помощью метода Монте–Карло показал, что в конечных выборках GPH-оценки d очень неточны. Следовательно, последующие ARMA-оценки для нового ряда будут сильно смещены.

Fox & Taqqu (1986) предложили приближенную оценку максимального правдоподобия в предположении нормальности одновременно для *всех* параметров ARFIMA-модели. Их процедура позволяет избежать явного вычисления ковариационной матрицы Σ для ARFIMA-процесса. Вместо этого используется оценка матрицы, обратной к Σ:

$$\left[\Sigma^{-1}\right]_{j,k} \approx a_{j,k}(\beta) \equiv \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\lambda}\frac{1}{f(\lambda,\beta)}d\lambda, \tag{5}$$

где β – вектор параметров ARFIMA-процесса, а $f(\cdot,\beta)$ – его спектральная плотность. В действительности бесконечномерная матрица с элементами $a_{j,k}$, $-\infty < j,k < \infty$ в точности совпадает с матрицей, обратной к бесконечномерной ковариационной матрице Σ. Тем не менее, так как процесс оценивания подразумевает конечномерные матрицы (хотя бы из-за конечности выборки), то *выборочное* равенство (5) лишь приблизительное. Fox & Taqqu (1986, далее FT) предложили эту аппроксимацию для широкого класса сильно зависимых стационарных гауссовских процессов, а в случае ARFIMA-процессов FT-оценка сводится к минимизации[3]

$$\sigma_T^2(\beta) \equiv \sum_{k=0}^{T-1}\frac{I\left(\frac{2\pi k}{T}\right)}{f\left(\frac{2\pi k}{T},\beta\right)} \to \min_{\beta}, \tag{6}$$

где $I(\cdot)$ – периодограмма процесса, определенная выше, $\beta = (d,\theta_1,\dots\theta_q,\phi_1,\dots\phi_p)$, а спектральная плотность ARFIMA(p,d,q) задается равенством (1) с $\sigma_\epsilon = 1$. В предположении нормальности FT-оценка $\hat{\beta}$ состоятельна и асимптотически нормальна с дисперсией

$$Q = 2\sigma_T^2(\beta)\left(\frac{\partial^2\sigma_T^2(\beta)}{\partial\beta\partial\beta'}\right)^{-1}.$$

Sowell (1992) предложил точный метод максимального правдоподобия для оценивания параметров ARFIMA-моделей. Несмотря на то, что процесс оценивания существенно более сложный, точный метод оказывается не сильно лучше, чем приближенный метод Fox & Taqqu (1986). В то же время оба метода существенно превосходят GPH-подход. Например, Sowell (1992) проводит симуляции ARFIMA$(0,d,0)$-процессов для различных d и выборок размера $T = 100$, и в среднем выборочная ошибка для GPH равна 0,3, в то время как для методов Sowell (1992) и FT она равна 0,08 и 0,095 соответственно. Таким образом, различие между точным и приближенными методами максимального правдоподобия невелико, а GPH-оценка *существенно* хуже. Она, тем не менее, может быть использована как начальное значение для численной оптимизации по d в алгоритмах ММП.

[2] Geweke & Porter-Hudak (1983) рекомендуют использовать $g(T) = T^\alpha$ для $\alpha = 0{,}5$ и 0,6.
[3] См. Maddala & Kim (2000, стр. 301–302).

3 Обзор исследования и описание данных

В работе исследуется гипотеза паритета покупательной способности (ППС) с помощью дробноинтегрированных процессов. В своей наиболее строгой форме ППС утверждает, что если P и P^* – ценовые индексы двух стран, а E – номинальный обменный курс, то реальный обменный курс между странами $P/(EP^*)$ всегда равен единице, в противном случае возникает арбитраж. Существует ряд факторов, из-за которых это теоретическое равенство не выполняется для реальных экономик: дифференцированные товары, проблема агрегирования цен разных товаров, различные репрезентативные корзины потребления, транзакционные издержки и т.д. Более слабая форма ППС-гипотезы утверждает, что флуктуации реального обменного курса достаточно малы. Точнее, реальный обменный курс «более стационарный», чем, например, ряды ценовых индексов. Это свойство можно проверять с помощью обычных тестов на коинтеграцию, однако обычным эмпирическим ответом на этот тест является «отсутствие коинтеграции». Одной из возможных причин таких результатов является узость выбора между $I(1)$ и $I(0)$.

С другой стороны, оценка дробной интегрированности процессов позволяет обнаружить ППС-свойство там, где обычные тесты на коинтеграцию не дают положительных результатов. Следуя Dueker & Startz (1995), можно определить, что два $I(d)$-процесса коинтегрированы, если некоторая их линейная комбинация является $I(d-b)$-процессом при некотором $b>0$. Отметим, что не требуется, чтобы d или b были целыми.

Заметим также, что некоторые исследователи (см. Johanssen, 1992 и Juselius, 1995) моделируют ценовые индексы как $I(2)$-процессы. Двойное взятие приращений временных рядов, вытекающее из такого моделирования, потенциально может привести к проблеме излишнего дифференцирования. В данной работе мы также проверим, является ли $I(2)$-моделирование обоснованным, или это всего лишь результат оптимизации $I(d)$ по дискретному набору $d \in \{0,1,2\}$, оставляющей оптимальное нецелое значение d нерассмотренным.

Мы тестируем гипотезу ППС между США и Японией за период 1974–2002 гг. Мы используем следующие помесячные данные: индекс оптовых цен в Японии без сезонных поправок[4] из economagic.com,[5] индекс потребительских цен США без сезонных поправок[6] из economagic.com,[7] и номинальный обменный курс японской йены к доллару США из базы данных FRED.[8] Изначально выборка состояла из наблюдений с 1:1971 по 11:2002, однако из-за структурного сдвига в начале 70-х[9] мы сузили выборку до 5:1974–11:2002 (343 наблюдения). Теоретически, можно было протестировать гипотезу о структурном сдвиге в 1974 г., однако размеры подвыборок до и после 1974 г. слишком неравны, а оценка долгосрочной зависимости по выборке из 40 наблюдений (до 1974 г.) невозможна.

[4]К сожалению, нам не удалось найти данных по индексу потребительских цен в Японии; кроме того, данные по оптовым ценам обрываются в 2002 году.

[5]Скачано с вэб-сайта *http://www.economagic.com/em-cgi/data.exe/bjap/cdda001001*.

[6]Мы используем данные без сезонного сглаживания по двум причинам. Во-первых, японские оптовые цены даны без сезонных поправок, поэтому логично использовать такие же данные для США. Во-вторых, как показал Ghysels (1990), сглаживающий эффект сезонных подправок приводит к ложной видимости нестационарного поведения. Цель нашего исследования – моделирование реальных макроэкономических данных, и одним из преимуществ модели дробноинтегрированных процессов является ее экономичность (один параметр d может хорошо описать поведение данных), в то время как сезонное сглаживание неявно добавляет 12 параметров в модель. Один из обычных аргументов в пользу сезонного сглаживания состоит в том, что автокорреляции до 12-го порядка могут значительно отличаться от нуля. Это свойство не является большой проблемой для моделей процессов с длинной памятью – в действительности это именно то, что мы и моделируем. Наконец, Diebold & Rudebusch (1989) рассматривают как сглаженные, так и несглаженные данные, и их оценки d отличаются лишь на 0,01. Таким образом, вопрос использования сезонного сглаживания не представляется ключевым.

[7]Скачано с вэб-сайта *http://www.economagic.com/em-cgi/data.exe/blscu/CUUR0000SA0*.

[8]Скачано с вэб-сайта St.Louis Federal Reserve System: *http://research.stlouisfed.org/fred2/data/EXJPUS.txt*.

[9]Шок цен на нефть и эксперименты Федеральной Резервной Системы США по борьбе с безработицей.

В дальнейшем P обозначает логарифм ценового индекса Японии, $p = P - P_{-1}$; P^* – логарифм ценового индекса США, $p^* = P^* - P^*_{-1}$; E – логарифм номинального обменного курса, $e = E - E_{-1}$.

4 Описание алгоритма

Для каждого временного ряда мы оцениваем $2^4 - 1 = 15$ ARFIMA-моделей, включающих соответствующие регрессоры AR(1), AR(2), MA(1), MA(2). При этом используется FT-оценка. Пусть β – вектор, содержащий все параметров (d и ARMA-коэффициенты). Минимизация (6) выполняется численно в программе GAUSS. При оптимизации оценка $\hat{d}_{GPH}$ является начальным значением для d, а нули – начальными значениями для коэффициентов AR и MA; $\hat{d}_{GPH}$ – GPH-оценка с $g(T) = T^{0,6}$. Для каждой оцененной ARFIMA-модели вычисляется $\hat{\sigma}^2_T = \sigma^2_T(\hat{\beta})$ – минимум функции из (6). Далее оптимальная модель выбирается минимизацией информационного критерия Шварца (SIC) по всем m из множества моделей:

$$SIC(m) \equiv \ln \sigma^2_T(\hat{\beta}) + \frac{\ln(T)\dim(\hat{\beta})}{T} \to \min_m . \tag{7}$$

5 Эмпирические результаты

Начнем с оценивания для временных рядов P, P^*, E и логарифма реального обменного курса $P - E - P^*$. Соответствующие точечные GPH-оценки параметра d равны[10] $1{,}137; 0{,}999; 0{,}911$ и $0{,}931$ и лежат вне «интервала стационарности» $d \in (-0{,}5; 0{,}5)$. Следовательно, на этом этапе коинтеграционное свойство не выполнено, и далее мы рассматриваем первую разность рядов, чтобы попасть в «интервал стационарности». В дальнейшем мы оперируем только первыми разностями логарифмов рядов, но с целью экономии места мы будем называть эти лог-дифференцированные ряды просто рядами цен, номинального и реального обменных курсов соответственно.

Таблица 1 содержит шесть наилучших ARFIMA-моделей для японского ценового индекса, отсортированных по критерию Шварца. Наилучшие модели содержат немного параметров,

Таблица 1: ARFIMA-модели для японских цен (переменная p)

AR и MA	$10^3 \times \hat{\sigma}^2_T$	SIC	$\hat{d}$
–	3,715	−2,4226	0,461
MA(1)	3,700	−2,4169	0,546
AR(1)	3,700	−2,4169	0,531
AR(2)	3,709	−2,4159	0,444
MA(2)	3,710	−2,4158	0,448
AR(1), AR(2)	3,700	−2,4096	0,551

а самая лучшая модель вообще не имеет AR- и MA-компонент. Таким образом, оптимальная модель для японских цен – это ARFIMA$(0, d, 0)$ с $\hat{d} = 0{,}461\,(0{,}043)$.[11] Заметим, что хотя точечная оценка лежит внутри интервала стационарности, она очень близка к верхней границе интервала (0,5). В действительности мы не можем отвергнуть нулевую гипотезу $H_0 : d = 0{,}5$ против $H_a : d < 0{,}5$ на 5%-ном уровне. С другой стороны, оценка d существенно меньше

[10] Стандартная ошибка каждой из оценок равна 0,133. Напомним, что регрессоры в GPH-уравнении детерминистические и поэтому асимптотическая дисперсия не зависит от свойств временного ряда.

[11] В дальнейшем в скобках указаны стандартные ошибки.

единицы, и поэтому моделирование исходного (недифференцированного) ценового ряда с помощью $I(2)$-процесса не представляется правильным.

В таблице 2 мы приводим наилучшие модели для ценового индекса США. Значения $\hat{\sigma}_T^2$

Таблица 2: ARFIMA-модели для цен США (переменная p^*)

AR и MA	$10^3 \times \hat{\sigma}_T^2$	SIC	$\hat{d}$
AR(1), AR(2), MA(2)	$4{,}7 \times 10^{-3}$	−5,3022	−0,102
AR(2), MA(1), MA(2)	$5{,}0 \times 10^{-3}$	−5,2697	−0,216
–	1,995	−2,6926	0,465
MA(1)	1,976	−2,6894	0,382
AR(1)	1,979	−2,6888	0,377
MA(2)	1,980	−2,6885	0,495

в двух верхних рядах таблицы выглядят слишком маленькими. Анализ оцененных коэфициентов в этих двух случаях показывает, что AR- и MA-значения очень велики, и корни соответствующих полиномов не лежат вне единичного круга (это означает, что оптимизационнный алгоритм GAUSS вышел за пределы допустимого значения параметров). Однако, хотя это и не указано явно, минимизация в (6) осуществляется только по такому множеству параметров, что ARMA-процесс стационарен и обратим. Следовательно, мы можем игнорировать результаты из первых двух рядов таблицы, и тогда оптимальная модель – это вновь ARFIMA$(0, d, 0)$ с $\hat{d} = 0{,}465\,(0{,}045)$. Заметим, что точечная оценка d очень близка к результатам, полученным для японских цен, и выводы аналогичны.

Далее мы рассмотрим результаты для обменного курса валют двух стран, см. таблицу 3. В этом случае спецификация ARFIMA$(0, d, 0)$ оказалась неоптимальной (15-ое и последнее

Таблица 3: ARFIMA-модели для обменного курса (переменная e)

AR и MA	$10 \times \hat{\sigma}_T^2$	SIC	$\hat{d}$
MA(1)	2,384	−0,6078	0,0056
AR(1), MA(1)	2,383	−0,6007	0,0406
AR(1), MA(2)	2,383	−0,6007	−0,0962
MA(1), MA(2)	2,383	−0,6006	0,0306
AR(2), MA(1)	2,383	−0,6006	−0,0413
AR(1)	2,425	−0,6006	−0,0914

место среди всех моделей по информационному критерию). Лучшей моделью можно считать ARFIMA$(0, d, 1)$. Оценки параметров порядка интеграции и MA(1)-коэффициента равны $\hat{d} = 0{,}006\,(0{,}055)$ и $\hat{\theta}_1 = -0{,}400\,(0{,}066)$ соответственно. Таким образом, $\hat{d}$ статистически равен нулю, и мы фактически имеем дело с обычной ARMA(0,1)-моделью.[12] В целом наши результаты подтвеждают теоретическую гипотезу о том, что дробная интегрированность чаще встречается в агрегированных временных рядах (например, ценовых индексах), чем в индивидуальных (например, обменных курсах).

Результаты можно сравнить с выводами других исследователей. Cheung (1993) использовал двухшаговую GPH-процедуру для оценивания ARFIMA(p, d, q)-спецификаций на примере пяти обменных курсов (использовались недельные данные с 1974 до 1989 гг.). Оцененный

[12] Для того, чтобы оценить качество оценивания с помощью приближенного ММП, мы оценили параметр ARMA(0,1) с помощью стандартного ММП. Оцененный параметр равен −0,409 (0,044), что очень близко к полученной выше оценке.

параметр d для японской йены оказался в интервале между 0,2 и 0,3. Выше мы уже обсуждали неоптимальность двухшагового GPH-подхода; необходима оптимизация *одновременно* по всем параметрам ARFIMA-модели. Для сравнения, точечная оценка d для (наихудшей) модели ARFIMA$(0, d, 0)$ равна 0,256 и попадает в интервал из Cheung (1993). Однако наилучшей моделью является ARFIMA$(0, d, 1)$, при этом d статистически равно нулю. Из этого можно сделать вывод, что динамика обменного курса лучше описывается обычными ARMA-моделями.

Близость оценок d для ценовых индексов наводит на мысль о возможной коинтеграции временных рядов. Чтобы проверить эту гипотезу, мы оценили ARFIMA-модели для реального обменного курса ($\equiv p - e - p^*$). Результаты мало отличались от оценок для номинального обменного курса: оптимальная модель – ARFIMA$(0, d, 1)$, наихудшая модель – ARFIMA$(0, d, 0)$, оценки коэффициентов – $\hat{d} = -0{,}009\,(0{,}054)$ и $\hat{\theta}_1 = -0{,}402\,(0{,}065)$.

Кроме этого, мы оценили параметры модели для разности ценовых индексов ($\equiv p - p^*$).[13] Оптимальная модель для этого ряда включает только AR(2)-коэффициент. Оценка AR(2)-коэффициента равна $-0{,}152\,(0{,}059)$, а оценка d равна $0{,}332\,(0{,}051)$. В действительности во всех моделях оценки d лежали в интервале $(0{,}14; 0{,}36)$, в то время как, например, все оценки d для ряда японских цен попали в интервал $(0{,}44; 0{,}55)$. Из этого можно сделать вывод о (дробной) коинтеграции рядов цен Японии и США. Возвращаясь к вопросу об оптимальной модели, результаты оценивания приведены в таблице 4.

Таблица 4: Оптимальные модели

Ряд	Описание	Модель	$\hat{d}$
p	Японская инфляция	ARFIMA$(0, d, 0)$	0,461 (0,043)
p^*	Инфляция США	ARFIMA$(0, d, 0)$	0,465 (0,045)
$p - p^*$	Инфляционный спрэд Япония–США	AR(2)+FI(d)	0,332 (0,051)
e	Номинальный обменный курс	ARFIMA$(0, d, 1)$	0,006 (0,055)
$p - e - p^*$	Реальный обменный курс	ARFIMA$(0, d, 1)$	−0,009 (0,054)

6 Выводы

Из результатов оценивания можно заключить, что ряды реального и номинального обменных курсов хорошо описываются обычными ARMA-моделями: оценки порядка дробной интеграции для логарифмических приращений рядов статистически равны нулю, и, следовательно, ППС-гипотеза в своей стандартной форме не выполнена: порядки дробной интеграции для рядов реального и номинального курсов равны. С другой стороны, ряды ценовых индексов Японии и США показали наличие долгосрочной памяти. Этот результат можно было предсказать, изучив коррелограммы временных рядов: автокорреляционная функция для инфляции США не затухает достаточно быстро, и обычная ARMA-методология вряд ли применима. В то же время ряд не настолько устойчив к стохастическим шокам, как случайное блуждание, в случае которого автокорреляционная функция вообще не убывает. Следовательно, взятие разности инфляционного ряда, скорее всего, привело бы к проблеме излишнего дифференцирования.

Автокорреляции ряда инфляции в Японии убывают быстрее, но не настолько быстро, чтобы оправдать ARMA-моделирование. Как и в случае с инфляцией в США, порядок дробной

[13] Фактически это ряд, составленный из разности инфляций двух стран; см. выше соглашение о терминологии.

интеграции ряда оказался существенно нецелым числом (точечные оценки равны 0,46 в каждом из случаев). При этом оказалось, что гипотеза о дробной коинтеграции не может быть отвергнута на 5%-ном уровне значимости. Отметим, что мы не оценивали коинтеграционный вектор, так как он известен с экономической точки зрения и равен $(1; -1)$. Оценка порядка дробной коинтеграции для инфляционного спрэда равна $\hat{d} = 0{,}332\,(0{,}051)$, что примерно на 3 стандартных ошибки меньше, чем порядок коинтеграции каждого из инфляционных рядов, что означает дробную коинтеграцию на соответствующем уровне значимости (в смысле определения Dueker & Startz, 1995).

Наши результаты подтверждают гипотезу Granger (1980) о том, что агрегирование индивидуальных авторегрессионных процессов может привести к наличию длинной памяти агрегированного временного ряда. В рассмотренном случае можно предположить, что рост цен в каждом из секторов экономики следует авторегрессионному процессу,[14] а агрегирование инфляционных данных по различным отраслям дает ряд с долгосрочной памятью.

Список литературы

Campbell, J.Y. & N.G. Mankiw (1987). Are output fluctuations transitory? *Quarterly Journal of Economics* 102, 857–880.

Cheung, Y. (1993). Long memory in foreign exchange rates. *Journal of Business & Economic Statistics* 11, 93–101.

Diebold, F.X. & G. Rudebusch (1989). Long memory and persistence in aggregate output. *Journal of Monetary Economics* 24, 189–209.

Dueker, M. & R. Startz (1995). Maximum likelihood estimation of fractional cointegration with an application to the short end of the yield curve. Working paper, University of Washington.

Fox, R. & M.S. Taqqu (1986). Large sample properties of parameter estimates for strongly dependent stationary gaussian time series. *Annals of Statistics* 14, 517–532.

Geweke, J. & S. Porter-Hudak (1983). The estimation and application of long memory time series models. *Journal of Time Series Analysis* 4, 221–238.

Ghysels E. (1990). Unit root tests and the statistical pitfalls of seasonal adjustment: The case of U.S. post-war real GNP. *Journal of Business & Economic Statistics* 8, 145–152.

Granger, C.W.J. (1980). Long memory relationships and the aggregation of dynamic models. *Journal of Econometrics* 14, 227–238.

Hamilton, J. (1994). Time Series Analysis. Princeton: Princeton University Press.

Hosking, J.R.M. (1981). Fractional differencing. *Biometrica* 68, 165–178.

Johanssen, S. (1992). An I(2) cointegration analysis of the purchasing power parity between Australia and USA. Глава в Colin Hargreaves (ed.). *Macroeconomic Modeling of the Long-run*. London: Edward Elgar.

Juselius, K. (1995). Do purchasing power parity and uncovered interest rate parity hold in the long-run? An example of likelihood inference in a multivariate time series model. *Journal of Econometrics* 69, 211–240.

Maddala, G. & I.-M. Kim (2000). Unit Roots, Cointegration and Structural Change. Cambridge: Cambridge University Press.

Nelson, C.R. & C.I. Plosser (1982). Trends and random walks in macroeconomic time series: Some evidence and implications. *Journal of Monetary Economics* 10, 139–162.

Sowell, F. (1992). Maximum likelihood estimation of stationary univariate fractionally integrated time series models. *Journal of Econometrics* 53, 165–188.

[14] С различными AR(1)-коэффициентами; чем выше этот коэффициент, тем «длиннее» реакция цен на стохастические шоки.

Long range dependence and the purchasing power parity

Oleg Obrezkov

VRG Investments, Moscow

The aim of this paper is to explore the purchasing power parity between the United States and Japan. This is done indirectly by estimating fractional integration orders of the aggregate price series in the two countries and nominal and real exchange rates. Our results suggest that both nominal and real exchange rates are well described by conventional I(1)-processes whereas both US and Japan's price levels are around I(1.46). The latter result comes into contradiction with the traditional view that aggregate price series are usually second-order integrated processes. The point estimate of the fractional integration order for the log-difference in price levels in the US and Japan yields the figure 1.33 which is (statistically) smaller than the order 1.46 obtained for the aggregate price series. The latter result may be considered as a (very weak) evidence of the purchasing power parity property: the fractional order of the ratio of the price levels is smaller than that for each price level.

Keywords: purchasing power parity, exchange rates, fractional integration

JEL Classification: C22, F31, F41