Задачи и решения

Задачи

Задача 6.1

Рассмотрим линейную модель, где среди регрессоров присутствует линейный тренд:

$$y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t,$$

и где ε_t независимы и одинаково распределены согласно некоторому распределению $\mathcal{D}$ с нулевым средним и дисперсией σ^2. Объектом интереса является β.

1. Выпишите МНК-оценку β (назовем ее $\hat{\beta}$) в форме отклонений и найдите ее асимптотическое распределение.
2. Исследоваетель предлагает избавиться от тренда в регрессорах с помощью взятия первых разностей:
$$y_t - y_{t-1} = \beta + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$
с последующим оцениванием β с помощью МНК. Выпишите эту оценку (назовем ее $\check{\beta}$) и найдите ее асимптотическое распределение.
3. Сравните оценки $\hat{\beta}$ и $\check{\beta}$ по асимптотической эффективности.

Задача 6.2

Пусть асимптотическое смещение второго порядка некоторой состоятельной асимптотически нормальной (с асимптотической дисперсией $V_{\hat{\theta}}$) оценки $\hat{\theta}$ скалярного параметра θ равно $B_{\hat{\theta}}$. Выведите асимптотическое смещение второго порядка для $g(\hat{\theta})$ как оценки $g(\theta)$, где $g(\cdot)$ – гладкая нелинейная функция.

Задача 6.3

Рассмотрим регрессию в матричной форме

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X}\beta + \mathcal{E},$$

где регрессоры $\mathcal{X}$ коррелируют с ошибками $\mathcal{E}$, но эта корреляция слаба. Рассмотрим разложение $\mathcal{E}$ на проекцию на $\mathcal{X}$ и ей ортогональную компоненту $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{E} = \mathcal{X}\pi + \mathcal{U}.$$

Предположим, что $\left(n^{-1}\mathcal{X}'\mathcal{X}, n^{-1/2}\mathcal{X}'\mathcal{U}\right) \xrightarrow{p} (Q, \xi)$, где $\xi \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_u^2 Q\right)$, и матрица Q полного ранга. Покажите, что в предположении о дрейфующем параметре $\pi = c/\sqrt{n}$, где n – размер выборки, а c фиксировано, МНК-оценка для β состоятельна и асимптотически нецентрировано нормальна, и выведите асимптотическое распределение статистика Вальда для тестирования системы линейных ограничений $R\beta = r$, где R имеет полный ранг q.

Решения

Решение 5.1

> Могут ли две случайные величины быть некоррелированными безусловно, но коррелироваными условно на третьей? Могут ли две случайные величины быть коррелированными безусловно, но некоррелироваными условно на третьей?

Ответ: могут в обоих случаях.

Для демонстрации первого явления положим $x = zu$ и $y = v$, где z, u и v – случайные величины с нулевым средним, и z независима от (u, v), в то время как ковариация между u и v ненулевая. Тогда $\mathbb{C}[x, y|z] = z\mathbb{C}[u, v] \neq 0$, в то время как $\mathbb{C}[x, y] = \mathbb{E}[z]\mathbb{C}[u, v] = 0$.

Для демонстрации второго явления положим $x = z + u$ и $y = z + v$, где z, u и v – независимые случайные величины с нулевым средним. Тогда $\mathbb{C}[x, y|z] = \mathbb{C}[u, v] = 0$, в то время как $\mathbb{C}[x, y] = \mathbb{V}[z] \neq 0$.

Решение 5.2

> Известно, что для простейшей авторегрессии с независимыми и одинаково распределенными инновациями
>
> $$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$
>
> в случае единичного корня $\rho = 1$ МНК-оценка $\hat{\rho}$ для ρ состоятельна и имеет распределение Дики–Фуллера
>
> $$T\left(\hat{\rho} - 1\right) \xrightarrow{d} \frac{\int_0^1 B(r)dB(r)}{\int_0^1 B(r)^2 dr},$$
>
> где $B(r)$ – стандартный Винеровский процесс на $[0, 1]$. Пусть «по глупости», вместо того, чтобы регрессировать y_t на y_{t-1}, мы регрессируем y_{t-1} на y_t и тестируем гипотезу о единичном корне. Выведите асимптотическое распределение такой оценки при наличии единичного корня. Состоятельна ли она для единицы?

В обратной регрессии МНК-оценка $\tilde{\rho}$ равна

$$\tilde{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^T y_t y_{t-1}}{\sum_{t=2}^T y_t^2} = \frac{\sum_{t=2}^T y_{t-1}^2 + \sum_{t=2}^T y_{t-1}\varepsilon_t}{\sum_{t=3}^{T+1} y_{t-1}^2},$$

так что

$$T\left(\tilde{\rho} - 1\right) = \frac{T^{-1}\sum_{t=2}^T y_{t-1}\varepsilon_t + T^{-1}y_1^2 - T^{-1}y_T^2}{T^{-2}\sum_{t=3}^{T+1} y_{t-1}^2} \xrightarrow{d} \frac{\int_0^1 B(r)dB(r) - B(1)^2}{\int_0^1 B(r)^2 dr} = -\frac{B(1)^2 + 1}{2\int_0^1 B(r)^2 dr},$$

поскольку

$$T^{-1}y_T^2 \xrightarrow{d} E[\varepsilon_t^2]B(1)^2.$$

Получили распределение, несколько отличающееся от распределения Дики–Фуллера. Ясно, что $\tilde{\rho}$ состоятельна для единицы.

Заметим, что для аналогичной регрессии со стационарным переменными

$$y_t = \rho x_t + u_t, \quad \mathbb{E}[u_t|x_t] = 0,$$

в то время как «прямая» МНК-оценка ρ состоятельна для единицы при $\rho = 1$, «обратная» МНК-оценка несостоятельна для единицы:

$$\tilde{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^T y_t x_t}{\sum_{t=2}^T y_t^2} = \frac{T^{-1}\sum_{t=2}^T x_t(x_t + u_t)}{T^{-1}\sum_{t=2}^T (x_t + u_t)^2} \xrightarrow{p} \frac{\mathbb{E}[x_t^2]}{\mathbb{E}[x_t^2] + \mathbb{E}[u_t^2]} \neq 1.$$

Объясняется такое расхождение результатов следующим образом. В то время как в стационарном случае источником состоятельности МНК-оценки является некоррелированность ошибки с регрессором, в нестационарном случае эта коррелированность не имеет значения: источником состоятельности является разная скорость роста слагаемых в числителе и знаменателе МНК-оценки за вычетом истинного параметра.

Решение 5.3

> Пусть скалярные случайные величины x и y имеют одно и то же математическое ожидание μ. Покажите, что тест Хаусмана на верность условия на моменты $\mathbb{E}[y] = \mu$ при верности условия на моменты $\mathbb{E}[x] = \mu$ асимптотически эквивалентен J-тесту на верность модели, состоящей из обоих условий на моменты. Каково интуитивное объяснение этого результата?

Для теста Хаусмана возьмем в качестве эффективной ОММ-оценку на основе системы из двух условий на моменты $\mathbb{E}[x-\mu] = \mathbb{E}[y-\mu] = 0$, которая, как нетрудно вывести, равна $\hat{\mu}_0 = \hat{\alpha}\bar{x} + (1-\hat{\alpha})\bar{y}$, где $\hat{\alpha}$ – оценка некоторой константы. В качестве второй возьмем ММ-оценку на основе одного условия на моменты $\mathbb{E}[x-\mu] = 0$, то есть $\hat{\mu}_1 = \bar{x}$. Заметим, что $\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_0 = \bar{x} - \hat{\alpha}\bar{x} - (1-\hat{\alpha})\bar{y} = (1-\hat{\alpha})(\bar{x}-\bar{y})$. Таким образом, тест Хаусмана основан на разнице $(\bar{x}-\bar{y})^2$, но и J-тест основан на ней же. Нормализирующие коэффициенты, конечно же, должны иметь один и тот же предел по вероятности.

Интуитивно, одно из условий на моменты (неважно какое) является лишь определением для μ, так что и J-тест, и тест Хаусмана проверяют соответствие второго условия на моменты этому определению.