Задачи и решения

Задачи

Задача 7.1

Временной ряд $\{X_t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ со свойством $\mathbb{E}[X_t] < \infty$ называется линейным (или имеет свойство линейной регрессии), если для всех $s \geq 0$ выполнено

$$\mathbb{E}[X_{t+s}|X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-k}] = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \ldots + \alpha_k X_{t-k},$$

то есть если матожидания X_t, условные на конечном количестве прошлых X-ов, линейны. Покажите с помощью контрпримера, что линейность временного ряда – не то же самое, что требование линейности условного матожидания на всей предыстории $\mathbb{E}[X_{t+s}|X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots]$.

Задача 7.2

Предположим, что

$$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i,$$

где u_i независимо и одинаково распределены, причем $\mathbb{E}\left[u_i\right] = 0$, $\mathbb{E}\left[u_i^2\right] = \sigma^2$ и $\mathbb{E}\left[u_i^3\right] = \nu$, в то время как регрессор x_i детерминистически ужимается: $x_i = \rho^i$, где $\rho \in (0, 1)$. Пусть размер выборки равен n. Выясните асимптотическое поведение МНК-оценок $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$ для $(\alpha, \beta, \sigma^2)$ по мере того как $n \to \infty$.

Задача 7.3

Рассмотрим модель

$$y = \alpha z^2 + u, \quad z = \pi x + v,$$

где

$$\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} | x\right] = 0, \quad \mathbb{V}\left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} | x\right] = \Sigma,$$

причем матрица Σ неизвестна. Набор троек $\{(x_i, z_i, y_i)\}_{i=1}^n$ образует случайную выборку.

1. Рассмотрим следующий двушаговый метод оценивания. На первом шаге мы регрессируем z на x и определяем $\hat{z} = \hat{\pi} x$, где $\hat{\pi}$ – МНК-оценка. На втором шаге мы регрессируем y на $\hat{z}^2$ и получаем МНК-оценку α. Покажите, что такая оценка α несостоятельна.

2. Предложите метод состоятельного оценивания α в духе 2ШМНК.

Список литературы

Newey, W.K. & K.D. West (1987). A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. *Econometrica* 55, 703–708.