Задачи и решения

Задачи

Задача 7.1

Временной ряд $\{X_t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ со свойством $\mathbb{E}[X_t] < \infty$ называется линейным (или имеет свойство линейной регрессии), если для всех $s \geq 0$ выполнено

$$\mathbb{E}[X_{t+s}|X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-k}] = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \ldots + \alpha_k X_{t-k},$$

то есть если матожидания X_t, условные на конечном количестве прошлых X-ов, линейны. Покажите с помощью контрпримера, что линейность временного ряда – не то же самое, что требование линейности условного матожидания на всей предыстории $\mathbb{E}[X_{t+s}|X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots]$.

Задача 7.2

Предположим, что

$$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i,$$

где u_i независимо и одинаково распределены, причем $\mathbb{E}\left[u_i\right] = 0$, $\mathbb{E}\left[u_i^2\right] = \sigma^2$ и $\mathbb{E}\left[u_i^3\right] = \nu$, в то время как регрессор x_i детерминистически ужимается: $x_i = \rho^i$, где $\rho \in (0, 1)$. Пусть размер выборки равен n. Выясните асимптотическое поведение МНК-оценок $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$ для $(\alpha, \beta, \sigma^2)$ по мере того как $n \to \infty$.

Задача 7.3

Рассмотрим модель

$$y = \alpha z^2 + u, \quad z = \pi x + v,$$

где

$$\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} | x\right] = 0, \quad \mathbb{V}\left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} | x\right] = \Sigma,$$

причем матрица Σ неизвестна. Набор троек $\{(x_i, z_i, y_i)\}_{i=1}^n$ образует случайную выборку.

1. Рассмотрим следующий двушаговый метод оценивания. На первом шаге мы регрессируем z на x и определяем $\hat{z} = \hat{\pi} x$, где $\hat{\pi}$ – МНК-оценка. На втором шаге мы регрессируем y на $\hat{z}^2$ и получаем МНК-оценку α. Покажите, что такая оценка α несостоятельна.

2. Предложите метод состоятельного оценивания α в духе 2ШМНК.

Список литературы

Newey, W.K. & K.D. West (1987). A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. *Econometrica* 55, 703–708.

Решения

Решение 6.1

Рассмотрим линейную модель, где среди регрессоров присутствует линейный тренд:

$$y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t,$$

и где ε_t независимы и одинаково распределены согласно некоторому распределению $\mathcal{D}$ с нулевым средним и дисперсией σ^2. Объектом интереса является β.

1. Выпишите МНК-оценку β (назовем ее $\hat{\beta}$) в форме отклонений и найдите ее асимптотическое распределение.
2. Исследователь предлагает избавиться от тренда в регрессорах с помощью взятия первых разностей:

   $$y_t - y_{t-1} = \beta + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

   с последующим оцениванием β с помощью МНК. Выпишите эту оценку (назовем ее $\check{\beta}$) и найдите ее асимптотическое распределение.
3. Сравните оценки $\hat{\beta}$ и $\check{\beta}$ по асимптотической эффективности.

1. МНК-оценка в данном случае равна

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})(t - \bar{t})}{\sum_{t=1}^{T}(t - \bar{t})^2}.$$

Рассмотрим теперь разницу

$$\hat{\beta} - \beta = \left(\frac{1}{T^{-3}\sum_t t^2 - (T^{-2}\sum_t t)^2}, -\frac{T^{-2}\sum_t t}{T^{-3}\sum_t t^2 - (T^{-2}\sum_t t)^2} \right) \begin{pmatrix} T^{-3}\sum_t \varepsilon_t t \\ T^{-2}\sum_t \varepsilon_t \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\sum_{t=1}^{T} t = \frac{T(T+1)}{2}, \quad \sum_{t=1}^{T} t^2 = \frac{T(T+1)(2T+1)}{6},$$

легко видеть, что первый вектор сходится к $(12, -6)$. Поэтому

$$T^{3/2}(\hat{\beta} - \beta) \stackrel{A}{=} (12, -6)\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} \begin{pmatrix} \frac{t}{T}\varepsilon_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix}.$$

Предполагая, что условия для ЦПТ для неоднородных мартингальных последовательностей (см., например, Proposition 7.8 в Hamilton, 1994) выполнены, находим, что

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} \begin{pmatrix} \frac{t}{T}\varepsilon_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \right),$$

поскольку

$$\lim \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \mathbb{V}\left[\frac{t}{T}\varepsilon_t\right] = \sigma^2 \lim \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \left(\frac{t}{T}\right)^2 = \frac{1}{3},$$

$$\lim \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{V}\left[\varepsilon_t\right]=\sigma^2,$$

$$\lim \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{C}\left[\frac{t}{T}\varepsilon_t,\varepsilon_t\right]=\sigma^2\lim\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{t}{T}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$T^{3/2}(\hat\beta-\beta)\to(12,-6)\cdot\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\sigma^2\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\right)=\mathcal{N}(0,12\sigma^2).$$

2. Для регрессии в приращениях МНК-оценка равна

$$\check\beta=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t-y_{t-1})=\beta+\frac{\varepsilon_T-\varepsilon_0}{T}.$$

В результате $T(\check\beta-\beta)=\varepsilon_T-\varepsilon_0\sim\mathcal{D}(0,2\sigma^2)$.

3. Если T достаточно велико, $\hat\beta\overset{A}{\sim}\mathcal{N}\left(\beta,12\sigma^2/T^3\right)$ и $\check\beta\overset{A}{\sim}\mathcal{D}\left(\beta,2\sigma^2/T^2\right)$. Легко видеть, что для больших T приближенная дисперсия у первой оценки меньше, чем у второй. Гораздо легче идентифицировать тренд у растущей последовательности, чем снос у дрейфующей.

Решение 6.2

Пусть асимптотическое смещение второго порядка некоторой состоятельной асимптотически нормальной (с асимптотической дисперсией $V_{\hat\theta}$) оценки $\hat\theta$ скалярного параметра θ равно $B_{\hat\theta}$. Выведите асимптотическое смещение второго порядка для $g(\hat\theta)$ как оценки $g(\theta)$, где $g(\cdot)$ – гладкая нелинейная функция.

Пусть стохастическим разложением для $\hat\theta$ будет

$$\hat\theta=\theta+\frac{A}{\sqrt{n}}+\frac{B}{n}+o_p\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $A\sim N\left(0,V_\theta\right)$ и $\mathbb{E}\left[B/n\right]=B_{\hat\theta}$. Тогда стохастическим разложением для $g(\hat\theta)$ будет

$$g(\hat\theta)=g(\theta)+g'(\theta)\left(\frac{A}{\sqrt{n}}+\frac{B}{n}\right)+\frac{g''(\theta)}{2}\frac{A^2}{n}+o_p\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому асимптотическое смещение второго порядка для $g(\hat\theta)$ равно

$$\mathbb{B}_2[g(\hat\theta)]=\mathbb{E}_2[g(\hat\theta)]-g(\theta)=\mathbb{E}\left[g'(\theta)\left(\frac{A}{\sqrt{n}}+\frac{B}{n}\right)+\frac{g''(\theta)}{2}\frac{A^2}{n}\right]=g'(\theta)B_{\hat\theta}+\frac{g''(\theta)V_{\hat\theta}}{2n}.$$

Решение 6.3

Рассмотрим регрессию в матричной форме

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X}\beta + \mathcal{E},$$

где регрессоры $\mathcal{X}$ коррелируют с ошибками $\mathcal{E}$, но эта корреляция слаба. Рассмотрим разложение $\mathcal{E}$ на проекцию на $\mathcal{X}$ и ей ортогональную компоненту $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{E} = \mathcal{X}\pi + \mathcal{U}.$$

Предположим, что $\left(n^{-1}\mathcal{X}'\mathcal{X}, n^{-1/2}\mathcal{X}'\mathcal{U}\right) \xrightarrow{p} (Q,\xi)$, где $\xi \sim \mathcal{N}\left(0,\sigma_u^2 Q\right)$, и матрица Q полного ранга. Покажите, что в предположении о дрейфующем параметре $\pi = c/\sqrt{n}$, где n – размер выборки, а c фиксировано, МНК-оценка для β состоятельна и асимптотически нецентрировано нормальна, и выведите асимптотическое распределение статистика Вальда для тестирования системы линейных ограничений $R\beta = r$, где R имеет полный ранг q.

МНК-оценка состоятельна:

$$\hat{\beta} - \beta = \left(n^{-1}\mathcal{X}'\mathcal{X}\right)^{-1} n^{-1}\mathcal{X}'\mathcal{E} = \frac{c}{\sqrt{n}} + \left(n^{-1}\mathcal{X}'\mathcal{X}\right)^{-1} n^{-1}\mathcal{X}'\mathcal{U} \xrightarrow{p} 0,$$

и асимптотически нормальна:

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta} - \beta\right) = c + \left(n^{-1}\mathcal{X}'\mathcal{X}\right)^{-1} n^{-1/2}\mathcal{X}'\mathcal{U} \xrightarrow{p} c + Q^{-1}\xi \sim N\left(c, \sigma_u^2 Q^{-1}\right).$$

Статистика Вальда имеет следующую асимптотику:

$$\mathcal{W} = \frac{n\left(R\hat{\beta} - r\right)'\left(R\left(\mathcal{X}'\mathcal{X}\right)^{-1}R'\right)^{-1}\left(R\hat{\beta} - r\right)}{\left(\mathcal{Y} - \mathcal{X}\hat{\beta}\right)'\left(\mathcal{Y} - \mathcal{X}\hat{\beta}\right)}$$

$$\xrightarrow{p} \frac{\left(c + Q^{-1}\xi\right)' R'\left(RQ^{-1}R'\right)^{-1} R\left(c + Q^{-1}\xi\right)}{\sigma_u^2} \sim \chi_q^2(\delta),$$

где δ – параметр нецентральности:

$$\delta = \frac{c'R'\left(RQ^{-1}R'\right)^{-1}Rc}{\sigma_u^2}.$$

Список литературы

Hamilton, J. (1994). *Time Series Analysis.* Princeton University Press.