Решения

Решение 6.1

Рассмотрим линейную модель, где среди регрессоров присутствует линейный тренд:

$$y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t,$$

и где ε_t независимы и одинаково распределены согласно некоторому распределению $\mathcal{D}$ с нулевым средним и дисперсией σ^2. Объектом интереса является β.

1. Выпишите МНК-оценку β (назовем ее $\hat{\beta}$) в форме отклонений и найдите ее асимптотическое распределение.
2. Исследователь предлагает избавиться от тренда в регрессорах с помощью взятия первых разностей:

   $$y_t - y_{t-1} = \beta + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

   с последующим оцениванием β с помощью МНК. Выпишите эту оценку (назовем ее $\check{\beta}$) и найдите ее асимптотическое распределение.
3. Сравните оценки $\hat{\beta}$ и $\check{\beta}$ по асимптотической эффективности.

1. МНК-оценка в данном случае равна

   $$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})(t - \bar{t})}{\sum_{t=1}^{T}(t - \bar{t})^2}.$$

   Рассмотрим теперь разницу

   $$\hat{\beta} - \beta = \left(\frac{1}{T^{-3}\sum_t t^2 - \left(T^{-2}\sum_t t\right)^2}, -\frac{T^{-2}\sum_t t}{T^{-3}\sum_t t^2 - \left(T^{-2}\sum_t t\right)^2}\right)\begin{pmatrix} T^{-3}\sum_t \varepsilon_t t \\ T^{-2}\sum_t \varepsilon_t \end{pmatrix}.$$

   Поскольку

   $$\sum_{t=1}^{T} t = \frac{T(T+1)}{2}, \quad \sum_{t=1}^{T} t^2 = \frac{T(T+1)(2T+1)}{6},$$

   легко видеть, что первый вектор сходится к $(12, -6)$. Поэтому

   $$T^{3/2}(\hat{\beta} - \beta) \stackrel{A}{=} (12, -6)\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}\begin{pmatrix} \frac{t}{T}\varepsilon_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix}.$$

   Предполагая, что условия для ЦПТ для неоднородных мартингальных последовательностей (см., например, Proposition 7.8 в Hamilton, 1994) выполнены, находим, что

   $$\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}\begin{pmatrix} \frac{t}{T}\varepsilon_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma^2\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\right),$$

   поскольку

   $$\lim \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{V}\left[\frac{t}{T}\varepsilon_t\right] = \sigma^2 \lim \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{t}{T}\right)^2 = \frac{1}{3},$$

$$\lim \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{V}\left[\varepsilon_t\right]=\sigma^2,$$

$$\lim \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{C}\left[\frac{t}{T}\varepsilon_t,\varepsilon_t\right]=\sigma^2\lim \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{t}{T}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$T^{3/2}(\hat{\beta}-\beta)\to(12,-6)\cdot\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\sigma^2\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\right)=\mathcal{N}(0,12\sigma^2).$$

2. Для регрессии в приращениях МНК-оценка равна

$$\check{\beta}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t-y_{t-1})=\beta+\frac{\varepsilon_T-\varepsilon_0}{T}.$$

В результате $T(\check{\beta}-\beta)=\varepsilon_T-\varepsilon_0\sim\mathcal{D}(0,2\sigma^2)$.

3. Если T достаточно велико, $\hat{\beta}\overset{A}{\sim}\mathcal{N}\left(\beta,12\sigma^2/T^3\right)$ и $\check{\beta}\overset{A}{\sim}\mathcal{D}\left(\beta,2\sigma^2/T^2\right)$. Легко видеть, что для больших T приближенная дисперсия у первой оценки меньше, чем у второй. Гораздо легче идентифицировать тренд у растущей последовательности, чем снос у дрейфующей.

Решение 6.2

Пусть асимптотическое смещение второго порядка некоторой состоятельной асимптотически нормальной (с асимптотической дисперсией $V_{\hat{\theta}}$) оценки $\hat{\theta}$ скалярного параметра θ равно $B_{\hat{\theta}}$. Выведите асимптотическое смещение второго порядка для $g(\hat{\theta})$ как оценки $g(\theta)$, где $g(\cdot)$ – гладкая нелинейная функция.

Пусть стохастическим разложением для $\hat{\theta}$ будет

$$\hat{\theta}=\theta+\frac{A}{\sqrt{n}}+\frac{B}{n}+o_p\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $A\sim N\left(0,V_\theta\right)$ и $\mathbb{E}\left[B/n\right]=B_{\hat{\theta}}$. Тогда стохастическим разложением для $g(\hat{\theta})$ будет

$$g(\hat{\theta})=g(\theta)+g'(\theta)\left(\frac{A}{\sqrt{n}}+\frac{B}{n}\right)+\frac{g''(\theta)}{2}\frac{A^2}{n}+o_p\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому асимптотическое смещение второго порядка для $g(\hat{\theta})$ равно

$$\mathbb{B}_2[g(\hat{\theta})]=\mathbb{E}_2[g(\hat{\theta})]-g(\theta)=\mathbb{E}\left[g'(\theta)\left(\frac{A}{\sqrt{n}}+\frac{B}{n}\right)+\frac{g''(\theta)}{2}\frac{A^2}{n}\right]=g'(\theta)B_{\hat{\theta}}+\frac{g''(\theta)V_{\hat{\theta}}}{2n}.$$

Решение 6.3

Рассмотрим регрессию в матричной форме

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X}\beta + \mathcal{E},$$

где регрессоры $\mathcal{X}$ коррелируют с ошибками $\mathcal{E}$, но эта корреляция слаба. Рассмотрим разложение $\mathcal{E}$ на проекцию на $\mathcal{X}$ и ей ортогональную компоненту $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{E} = \mathcal{X}\pi + \mathcal{U}.$$

Предположим, что $\left(n^{-1}\mathcal{X}'\mathcal{X}, n^{-1/2}\mathcal{X}'\mathcal{U}\right) \xrightarrow{p} (Q, \xi)$, где $\xi \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_u^2 Q\right)$, и матрица Q полного ранга. Покажите, что в предположении о дрейфующем параметре $\pi = c/\sqrt{n}$, где n – размер выборки, а c фиксировано, МНК-оценка для β состоятельна и асимптотически нецентрировано нормальна, и выведите асимптотическое распределение статистика Вальда для тестирования системы линейных ограничений $R\beta = r$, где R имеет полный ранг q.

МНК-оценка состоятельна:

$$\hat{\beta} - \beta = \left(n^{-1}\mathcal{X}'\mathcal{X}\right)^{-1} n^{-1}\mathcal{X}'\mathcal{E} = \frac{c}{\sqrt{n}} + \left(n^{-1}\mathcal{X}'\mathcal{X}\right)^{-1} n^{-1}\mathcal{X}'\mathcal{U} \xrightarrow{p} 0,$$

и асимптотически нормальна:

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta} - \beta\right) = c + \left(n^{-1}\mathcal{X}'\mathcal{X}\right)^{-1} n^{-1/2}\mathcal{X}'\mathcal{U} \xrightarrow{p} c + Q^{-1}\xi \sim N\left(c, \sigma_u^2 Q^{-1}\right).$$

Статистика Вальда имеет следующую асимптотику:

$$\mathcal{W} = \frac{n\left(R\hat{\beta} - r\right)'\left(R\left(\mathcal{X}'\mathcal{X}\right)^{-1}R'\right)^{-1}\left(R\hat{\beta} - r\right)}{\left(\mathcal{Y} - \mathcal{X}\hat{\beta}\right)'\left(\mathcal{Y} - \mathcal{X}\hat{\beta}\right)}$$

$$\xrightarrow{p} \frac{\left(c + Q^{-1}\xi\right)' R'\left(RQ^{-1}R'\right)^{-1} R\left(c + Q^{-1}\xi\right)}{\sigma_u^2} \sim \chi_q^2(\delta),$$

где δ – параметр нецентральности:

$$\delta = \frac{c'R'\left(RQ^{-1}R'\right)^{-1}Rc}{\sigma_u^2}.$$

Список литературы

Hamilton, J. (1994). *Time Series Analysis.* Princeton University Press.