

# Статьи: финансовая эконометрика

## Моделирование многомерных параметрических плотностей финансовых доходностей\*

Алексей Балаев<sup>†</sup>

*Высшая школа экономики, Москва, Россия*

В данной работе сравниваются некоторые двумерные параметризации условных функций плотности для доходностей фондовых индексов. Сравнение проводится в терминах качества внутривыборочной подгонки и предсказательной способности вне выборки при предсказании условной функции плотности в целом. Рассматриваются скошенное нормальное распределение, скошенное распределение Стьюдента, скошенное обобщенное распределение ошибки и распределение, основанное на разложении Грамма–Шарлье. Основное внимание уделяется способности данных функций плотности учитывать асимметрию и толщину так называемых «многомерных хвостов» распределения. Используя тест, основанный на информационном критерии Кульбака–Лейблера, мы проводим попарное сравнение оцененных моделей для условной функции плотности отдельно внутри и вне выборки. Затем модели упорядочиваются по качеству подгонки и предсказательной способности. В работе обсуждаются причины превосходства той или иной спецификации функции плотности над другой.

*Ключевые слова: условная функция плотности, разложение Грамма–Шарлье, скошенное распределение, качество подгонки, предсказательная способность*  
*Классификация JEL: C14, C16, C22, C32, C51, C53, C58*

### 1 Введение

Типичная задача в теории выбора финансового портфеля – это максимизация ожидаемой доходности портфеля при наличии доступной к данному моменту времени информации и некоторых ограничений на уровень риска портфеля. В теории для построения оптимального портфеля инвестору необходимо знание совместного распределения доходностей имеющихся на рынке активов, условного на доступной к текущему моменту времени информации. В реальности, однако, такое знание отсутствует, и это условное распределение должно оцениваться. Как правило, интерес представляет оценка условной функции плотности для вектора доходностей доступных активов.

Для оценивания этой функции плотности можно исходить из различных параметризаций или использовать копула-функции (копулы). В настоящее время копульный подход приобретает все большую популярность на практике. Однако при изучении литературы возникает ощущение, что копулами начали пользоваться, не придя к консенсусу в параметрическом подходе. В рамках параметрического подхода остаются вопросы: какие параметризации функции плотности следует использовать, каково их соответствие данным внутри выборки оценивания, и насколько хорошо с их помощью предсказывается условное распределение доходностей вне выборки оценивания. В настоящей статье мы в рамках параметрического подхода частично отвечаем на эти вопросы.

\*Цитировать как: Балаев, Алексей (2011) «Моделирование многомерных параметрических плотностей финансовых доходностей», Квантиль, №9, стр. 39–60. Citation: Balaev, Alexey (2011) “Modeling multivariate parametric densities of financial returns,” *Quantile*, No.9, pp. 39–60.

<sup>†</sup>Адрес: 109028, г. Москва, Покровский бульвар, д. 11. Электронная почта: [a.balaev@gmail.com](mailto:a.balaev@gmail.com)

В работе проведено сравнение некоторых двумерных параметризаций условных функций плотности для доходностей нескольких фондовых индексов. Сравнение проводится в терминах качества внутривыборочной подгонки и предсказательной способности вне выборки оценивания при предсказании условной функции плотности в целом. Рассматриваются скошенное нормальное распределение, скошенное распределение Стьюдента, скошенное распределение GED (обобщенное распределение ошибки) и распределение, основанное на разложении Грамма–Шарлье (для краткости, далее – распределение Грамма–Шарлье). Первые два из упомянутых распределений достаточно широко известны, чего нельзя сказать о двух последних. При выборе параметризаций основное внимание уделялось эффектам, порождаемым формой соответствующих функций плотности. Поэтому мы не используем сложные структуры для вектора условных средних и условной ковариационной матрицы.

Все модели оцениваются и тестируются на выборках дневных доходностей фондовых индексов различных стран. Используя тест, основанный на информационном критерии Кульбака–Лейблера (далее, KLIC-тест), мы проводим попарное сравнение оцененных моделей для условной функции плотности отдельно внутри и вне выборки оценивания. Затем модели упорядочиваются по качеству подгонки и предсказательной способности. Процедура приводит к следующему ранжированию распределений. Внутри выборки оценивания: 1 – скошенное распределение Стьюдента, 2 – скошенное распределение GED и распределение Грамма–Шарлье, 3 – скошенное нормальное распределение. Вне выборки оценивания: 1 – скошенное распределение Стьюдента и скошенное распределение GED, 2 – распределение Грамма–Шарлье, 3 – скошенное нормальное распределение. В работе обсуждаются причины превосходства той или иной спецификации функции плотности над другой внутри или вне выборки оценивания.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 приведены спецификации для вектора условных средних и ковариационной матрицы, которые используются во всех моделях условной функции плотности, рассматриваемых в работе. В разделе 3 приведено описание параметризаций многомерных функций плотности, которые используются для учета асимметрии и так называемых «многомерных тяжелых хвостов» в распределениях векторов доходностей. Раздел 4 посвящен описанию KLIC-теста и его применению для сравнения невложенных моделей для функции плотности. В разделе 5 дано описание использованных данных, и проведен некоторый предварительный эмпирический анализ. В разделах 6 и 7 представлены результаты оценивания всех построенных моделей для двумерных условных функций плотности, а также результаты эмпирического сравнения этих моделей. Наконец, в разделе 8 приводятся выводы и возможные направления дальнейшей работы.

## 2 Условное среднее и ковариационная матрица

В этом разделе описаны простые спецификации для вектора условных средних и условной ковариационной матрицы, которые в дальнейшем используются со всеми параметризациями условной функции плотности, рассмотренными в разделе 3.

В одномерном случае довольно часто AR-компонента в динамике финансовых доходностей является незначимой. Поэтому, как правило, условное среднее в одномерном случае можно игнорировать (например, его можно зафиксировать на уровне 0) без значительных потерь точности любой модели для условной функции плотности распределения доходностей.

Однако в многомерном случае следует всегда использовать нетривиальную спецификацию вектора условных средних, поскольку доходности различных активов (или различных рынков) могут коррелировать. Например, в разделе 5 будет показано, что существуют довольно четкие динамические связи между доходностями фондовых индексов различных стран. Лагированная величина доходности на одном рынке может рассматриваться как информация, которая влияет на доходности на других рынках.

Пусть  $N$  – число рынков (или активов) в модели, а  $r_t$  –  $N$ -мерный вектор доходностей этих

рынков в момент времени  $t$ . Для того чтобы учесть в модели упомянутые динамические связи между рынками, мы используем простую векторную авторегрессию 1-го порядка с вектором-константой, то есть модель VAR(1):

$$r_t = c + Qr_{t-1} + \epsilon_t, \quad (1)$$

где, как обычно принято обозначать,  $\epsilon_t$  – это  $N$ -мерный вектор шоков.

Это простейшая из доступных спецификация вектора условных средних. Безусловно, можно использовать и более сложные модели условного среднего. Например, в структуре условного среднего можно учитывать многомерные GARCH-эффекты, что реализовано в моделях MGARCH-in-mean (MGARCH-эффекты в условном среднем). Однако, как было упомянуто, нас главным образом интересует форма оцениваемых функций плотности. В такой постановке, на наш взгляд, простой VAR(1) спецификации для условного среднего вполне достаточно.

Далее, одномерный анализ финансовых доходностей практически всегда выявляет статистически значимую GARCH-структуру для их условной дисперсии. Поэтому в многомерном случае эффекты кластеризации волатильности также должны быть учтены. При этом не исключено, что если доходности на различных рынках связаны, то и их волатильности могут быть связаны. Для учета стандартных GARCH-эффектов и возможных связей между волатильностями мы используем многомерную GARCH-модель BEKK(1,1)<sup>1</sup> для условной ковариационной матрицы вектора  $\epsilon_t$ . Ее спецификация является достаточно гибкой и гарантирует положительную определенность условной ковариационной матрицы в любой момент времени.<sup>2</sup> Модель BEKK(1,1) имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= H_t^{1/2} \eta_t, \\ H_t &= \Omega\Omega' + A\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-1}'A' + BH_{t-1}B', \end{aligned} \quad (2)$$

$$\eta_t \sim N(0, I_N), \quad (3)$$

где  $H_t$  – условная ковариационная матрица, а  $\eta_t$  – вектор так называемых стандартизованных ошибок.

Это одна из простейших спецификаций для условной ковариационной матрицы вектора доходностей. Существует масса других MGARCH-моделей, из которых можно выбирать. Например, для  $H_t$  можно использовать широко известную в литературе модель DCC-GARCH<sup>3</sup> Но опять-таки, поскольку нашей основной задачей является сравнение форм функций плотности, мы не используем сложные спецификации для ковариационной матрицы. Более того, использование BEKK-модели выгодно тем, что это одна из наиболее гибких на сегодняшний день MGARCH-моделей.

### 3 Распределение стандартизованных ошибок

В рамках нашего анализа мы заменяем многомерное нормальное распределение в уравнении (3) более общим условным распределением с функцией плотности  $p_{t-1}(\eta_t|\theta)$ , где  $\theta$  – конечный вектор параметров.

В этом разделе рассмотрены 4 параметризации для функции плотности  $p_{t-1}(\eta_t|\theta)$ , которые мы затем используем для моделирования распределения вектора стандартизованных ошибок  $\eta_t$ . Для каждой параметризации описано то, как в ней учитывается асимметрия и многомерные «тяжелые хвосты» распределений.

<sup>1</sup> Baba–Engle–Kraft–Kroner MGARCH-модель, предложенная в Engle & Kroner (1995).

<sup>2</sup> Обзор MGARCH-моделей и обсуждение возникающих при их построении проблем можно найти, например, в Silvennoinen & Terasvirta (2008).

<sup>3</sup> Предложена в Engle (2002).

Параметры во всех рассматриваемых параметризациях функции  $p_{t-1}(\eta_t|\theta)$  предполагаются постоянными. Это делает модели в некотором смысле равноправными и упрощает их сравнение. Если предположить изменяющиеся во времени параметры, то желательно для каждой параметризации найти наилучшую модель динамики параметров. На наш взгляд, это достаточно сложная задача, и в данной работе мы ограничиваемся предположением о постоянных параметрах.

### 3.1 Скошенное нормальное распределение

Функция плотности многомерного скошенного нормального распределения, являющаяся обобщением соответствующей одномерной функции плотности, была предложена в Azzalini & Dalla Valle (1996) и дополнительно обобщена в Azzalini & Capitanio (1999).

Пусть  $\mu \in R^N$  и  $\tau$  – параметры расположения и масштаба, где  $\tau = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ ,  $\tau_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Тогда для вектора стандартизованных ошибок условная функция плотности скошенного нормального распределения запишется в виде

$$p_{t-1}(\eta_t|\mu, \tau, \Sigma, \alpha) = 2\phi_N(\eta_t - \mu, \Sigma)\Phi(\alpha'\tau^{-1}(\eta_t - \mu)), \quad (4)$$

где  $\phi_N(\cdot, \Omega)$  –  $N$ -мерная функция плотности нормального распределения с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей  $\Omega$ ,  $\Phi(\cdot)$  – одномерная функция распределения  $N(0, 1)$ ,  $\alpha$  –  $N$ -мерный вектор, определяющий направления скошенности. Центр, вокруг которого располагается плотность, уже учитывается в используемой нами VAR(1)-модели для условного среднего, и поэтому мы полагаем  $\mu = 0$ . Вектор параметров  $\alpha$  не может быть идентифицирован при произвольной матрице  $\tau$ . Поэтому мы также полагаем  $\tau = I_N$  перед оцениванием модели.

Вектор параметров асимметрии  $\alpha$  напрямую контролирует направления скошенности распределения, и случай  $\alpha = 0$  соответствует симметричному нормальному распределению. Основным недостатком данной параметризации состоит, очевидно, в том, что она не позволяет контролировать толщину многомерных хвостов распределения. Поэтому можно ожидать, что оцененная по данной параметризации функция плотности не будет иметь многомерных тяжелых хвостов и, как результат, одномерных тяжелых хвостов в соответствующих маргинальных распределениях, что является одной из основных широко известных характеристик распределения финансовых доходностей.

### 3.2 Скошенное распределение Стьюдента

В работе Bauwens & Laurent (2005) предложена общая процедура введения асимметрии в симметричные многомерные распределения. Применяя данную процедуру к многомерному распределению Стьюдента, Bauwens & Laurent (2005) строят так называемое многомерное скошенное распределение Стьюдента.

Пусть  $\nu$  – скаляр, параметр степеней свободы и  $\xi$  – вектор направлений скошенности распределения. Тогда для вектора стандартизованных ошибок условная функция плотности скошенного распределения Стьюдента запишется в виде<sup>4</sup>

$$p_{t-1}(\eta_t|\xi, \nu) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^N \frac{\Gamma((\nu + N)/2)}{\Gamma(\nu/2)(\nu - 2)^{N/2}} \left(1 + \frac{\eta_t^* \eta_t^*}{\nu - 2}\right)^{-(N+\nu)/2} \prod_{i=1}^N \frac{\xi_i s_i}{1 + \xi_i^2}, \quad (5)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\eta_t^* = (\eta_{t1}^*, \dots, \eta_{tN}^*)',$$

<sup>4</sup> В разделе 6 при оценке соответствующей модели мы используем немного другую параметризацию для скошенного распределения Стьюдента из-за специфики процедуры языка GAUSS, которую мы применяем при оценивании.

$$\begin{aligned}\eta_{ti}^* &= (s_i \eta_{ti} + m_i) \xi_i^{I_i}, \\ m_i &= \frac{\Gamma((\nu - 1)/2) \sqrt{\nu - 2}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu/2)} \left( \xi_i - \frac{1}{\xi_i} \right), \\ s_i^2 &= \left( \xi_i^2 + \frac{1}{\xi_i^2} - 1 \right) - m_i^2\end{aligned}$$

и

$$I_i = \begin{cases} -1, & \text{если } \eta_{ti} \geq -m_i/s_i, \\ 1, & \text{если } \eta_{ti} < -m_i/s_i. \end{cases}$$

Это довольно гибкая параметризация. Асимметрия распределения напрямую контролируется вектором  $\xi$ , а толщина многомерных хвостов контролируется параметром степеней свободы  $\nu$ .

### 3.3 Скошенное распределение GED

Насколько известно автору, симметричное многомерное распределение GED<sup>5</sup> было впервые предложено в работе Giller (2005). В рамках нашего анализа для вектора стандартизованных ошибок симметричная многомерная условная функция плотности распределения GED запишется в виде

$$p_{t-1}(\eta_t | \kappa) = \frac{1}{\sqrt{\pi}^N} \frac{\Gamma(1 + N/2)}{\Gamma(1 + n\kappa)} \left( \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \right)^{N/2} \exp \left( - \left( \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \eta_t' \eta_t \right)^{1/2\kappa} \right), \quad (6)$$

где  $\kappa$  – скалярный параметр, контролирующий толщину многомерных хвостов распределения. Опять-таки, насколько известно автору, в литературе не рассматривалась скошенная версия данного распределения. Для построения такого распределения можно применить процедуру, предложенную в Bauwens & Laurent (2005), к симметричному распределению GED.

Данная процедура на основе симметричной  $N$ -мерной функции плотности  $f(x)$  строит функцию плотности  $f^s(x|\xi)$ , допускающую скошенность с вектором направлений скошенности  $\xi$ . Построение основано на следующих преобразованиях:

$$f^s(x|\xi) = 2^N f(x^*) \prod_{i=1}^N \frac{\xi_i}{1 + \xi_i^2},$$

$$x^* = (x_1^*, \dots, x_N^*)',$$

$$x_i^* = x_i \xi_i^{I_i}, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$I_i = \begin{cases} -1, & \text{если } x_i \geq 0, \\ 1, & \text{если } x_i < 0. \end{cases}$$

Применяя эти преобразования к функции (6), получаем условную функцию плотности скошенного распределения GED для вектора стандартизованных ошибок в виде

$$p_{t-1}(\eta_t | \xi, \kappa) = \frac{\Gamma(1 + N/2)}{\Gamma(1 + n\kappa)} \left( \frac{3\Gamma(3\kappa)}{\pi\Gamma(\kappa)} \right)^{N/2} \exp \left( - \left( \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \eta_t^{*'} \eta_t^* \right)^{1/2\kappa} \right) \prod_{i=1}^N \frac{\xi_i}{1 + \xi_i^2}, \quad (7)$$

$$\eta_t^* = (\eta_{t1}^*, \dots, \eta_{tN}^*)',$$

<sup>5</sup> Generalized Error Distribution, или обобщенное распределение ошибки.

$$\eta_{ti}^* = \eta_{ti} \xi_i^{I_i}, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$I_i = \begin{cases} -1, & \text{если } \eta_{ti} \geq 0, \\ 1, & \text{если } \eta_{ti} < 0. \end{cases}$$

Эта параметризация также является довольно гибкой. Как и для скошенного распределения Стьюдента, асимметрия напрямую контролируется вектором  $\xi$ , а толщина многомерных хвостов контролируется параметром  $\kappa$ .

### 3.4 Распределение Грамма–Шарлье

Функция плотности данного распределения получается на основе разложения истинной многомерной условной функции плотности вектора стандартизованных ошибок в ряд Грамма–Шарлье вокруг распределения  $N(0, I_N)$ . В полученном ряде все члены после третьего отбрасываются, а оставшаяся часть объявляется функцией плотности. Для вектора стандартизованных ошибок данная условная функция плотности имеет вид<sup>6</sup>

$$p_{t-1}(\eta_t | D_3, D_4) = \phi_N(\eta_t, I_N) \left( 1 + \frac{1}{3!} \text{tr}(D_3 [(\eta_t \eta_t' - 3I_N) \otimes \eta_t]) + \frac{1}{4!} \text{tr}([D_4 - 3 \text{vec}(I_N) \text{vec}(I_N)'] \Omega(\eta_t)) \right), \quad (8)$$

где

$$\Omega(\eta_t) = \text{vec}(\eta_t \eta_t' - I_N) \text{vec}(\eta_t \eta_t' - I_N)' - 4I_N \otimes (\eta_t \eta_t') + 2I_{N^2},$$

и  $D_3, D_4$  – матрицы соответственно третьих и четвертых моментов истинного условного распределения стандартизованных ошибок с истинной функцией плотности  $p_{t-1}(\eta_t)$ , которую мы хотим аппроксимировать:

$$D_3 = \int_{R^N} \eta \eta' \otimes \eta' p_{t-1}(\eta) d\eta,$$

$$D_4 = \int_{R^N} \eta \eta' \otimes \eta \eta' p_{t-1}(\eta) d\eta.$$

Заметим, что поскольку мы рассматриваем только первые три члена ряда Грамма–Шарлье, функция (8) не является функцией плотности распределения в соответствии со строгим определением. К счастью, эта функция интегрируется в единицу для любых матриц  $D_3$  и  $D_4$ . Однако для некоторых  $D_3$  и  $D_4$  существуют области вектора  $\eta_t$ , в которых данная функция принимает отрицательные значения.<sup>7</sup> Как мы увидим в разделе 6, это приводит к значительным трудностям при оценивании соответствующей модели.

Чтобы гарантировать положительность функции плотности Грамма–Шарлье на всем  $R^N$ , можно возвести в квадрат некоторые из ее членов. Однако данное преобразование приводит к излишне нелинейной функции, которая к тому же, как впрочем и исходная функция, содержит довольно много параметров. В частности, для случая  $N = 2$ , который мы рассматриваем в разделе 6, модель VAR(1)–BEKK(1,1) с условной функцией плотности Грамма–Шарлье для стандартизованных ошибок предполагает оценивание 26 параметров. При такой высокой размерности после возведения в квадрат каких-либо членов в функции плотности Грамма–Шарлье сходимость процедур оптимизации при оценивании модели значительно ухудшается. Из-за этих сложностей мы рассматриваем только исходную нескорректированную версию функции плотности Грамма–Шарлье (8).

<sup>6</sup> Подробное описание построения данной функции можно найти, например, в Del Brio, Niguez & Perote (2008).

<sup>7</sup> На Рис. 4 в Приложении показаны области для параметров индивидуальной скошенности и куртозиса, в которых функция плотности Грамма–Шарлье как функция аргумента  $\eta_t$  всюду положительна и унимодальна при условии что компоненты вектора  $\eta_t$  некоррелированы.

#### 4 Процедура сравнения моделей

В этом разделе описывается метод сравнения двух конкурирующих моделей условной функции плотности как внутри, так и вне выборки оценивания. Поскольку рассматриваемые модели функции плотности являются невлуженными, для такого сравнения удобно использовать информационный критерий Кульбака–Лейблера (Vuong, 1989). Сравнение двух функций плотности проводится в форме теста на основе этого информационного критерия (далее, КЛИС-теста). В данном разделе КЛИС-тест описан в контексте моделирования условной функции плотности для вектора стандартизованных ошибок  $\eta_t = (\eta_{t1}, \dots, \eta_{tN})'$ .

Пусть имеются две конкурирующие условные функции плотности для вектора стандартизованных ошибок  $f(\eta_t|I_{t-1}, \theta)$  и  $g(\eta_t|I_{t-1}, \phi)$ . Чтобы выбрать из них лучшую, с точки зрения качества подгонки внутри выборки или предсказательной способности вне ее, проводится следующий тест.

Нулевая гипотеза состоит в эквивалентности моделей:

$$H_0 : f(\eta_t|I_{t-1}, \theta) \sim g(\eta_t|I_{t-1}, \phi).$$

Это означает, что расстояние Кульбака–Лейблера между ними равно нулю:

$$E \left[ \log \frac{f(\eta_t|I_{t-1}, \theta_*)}{g(\eta_t|I_{t-1}, \phi_*)} \right] = 0,$$

где  $\theta_*$  и  $\phi_*$  – это псевдоистинные значения параметров для двух моделей функции плотности.

Имеются две альтернативные гипотезы, соответствующие случаям, когда одна модель предпочтительнее другой:

$$H_f : f(\eta_t|I_{t-1}, \theta) \succ g(\eta_t|I_{t-1}, \phi),$$

$$H_g : g(\eta_t|I_{t-1}, \phi) \succ f(\eta_t|I_{t-1}, \theta).$$

Обозначим через  $\omega_*$  дисперсию логарифмической разности рассматриваемых функций плотности:

$$\omega_* = \mathbb{V} \left( \log \frac{f(\eta_t|I_{t-1}, \theta_*)}{g(\eta_t|I_{t-1}, \phi_*)} \right).$$

Эту дисперсию можно состоятельно оценить следующим образом:

$$\widehat{\omega}_* = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \left( \log \frac{f(\eta_t|I_{t-1}, \widehat{\theta})}{g(\eta_t|I_{t-1}, \widehat{\phi})} \right)^2 - \left( \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \log \frac{f(\eta_t|I_{t-1}, \widehat{\theta})}{g(\eta_t|I_{t-1}, \widehat{\phi})} \right)^2,$$

где  $\widehat{\theta}$  и  $\widehat{\phi}$  – это оценки параметров двух моделей методом максимального квазиправдоподобия (QML-оценки).

Далее, обозначим через  $LR$  сумму выборочных логарифмических разностей рассматриваемых функций плотности:

$$LR = \sum_{t=2}^T \log \frac{f(\eta_t|I_{t-1}, \widehat{\theta})}{g(\eta_t|I_{t-1}, \widehat{\phi})}.$$

КЛИС-тест основан на следующей асимптотике  $LR$  в рамках каждой из гипотез:

$$\frac{LR}{\sqrt{T\widehat{\omega}_*}} \xrightarrow{H_0} N(0, 1), \quad \xrightarrow{H_f} +\infty, \quad \xrightarrow{H_g} -\infty.$$

КЛИС-тест может быть проведен как внутри выборки оценивания (для сравнения качества подгонки моделей) так и вне ее (для сравнения предсказательной способности моделей).

Потенциальная проблема данного теста – возможность ситуации, когда  $\omega_* = 0$ . Для проверки этого равенства необходимо проводить предварительное тестирование. Однако, существующий на данный момент тест для проверки гипотезы  $\omega_* = 0$  использует статистику с нестандартным и непивотальным распределением, и чтобы не усложнять расчеты, мы не проводим предварительное тестирование в данной работе.

## 5 Данные и предварительный анализ

В этом разделе описаны используемые в расчетах данные и предварительно отмечены некоторые их свойства, которые предполагается учесть в оцениваемых двумерных моделях условной функции плотности.

### 5.1 Данные

Мы используем дневные цены закрытия фондовых индексов разных стран: S&P500 (США), FTSE100 (Великобритания), CAC40 (Франция), DAX (Германия), Hang-Seng (Китай), NIKKEI225 (Япония).<sup>8</sup> Стартовая дата – 26 ноября 1990 г. – первый день, когда начали вычислять немецкий индекс DAX. Последняя дата в выборке – 29 августа 2008 г. Финансовый кризис вызвал ультравысокую волатильность в сентябре 2008 г., и поэтому мы не включаем в наши данные динамику индексов начиная с этого месяца, поскольку в этом случае оценки параметров моделей слишком чувствительны к малым изменениям в данных. Мы работаем с дневными логарифмическими доходностями на индексы, то есть с величинами  $r_t = 100 \ln(S_t/S_{t-1})$ , где  $S_t$  – значение индекса в момент времени  $t$ .

Чтобы иметь возможность оценивать многомерные условные функции плотности, мы синхронизировали данные. То есть мы исходим из данных о ценах только в такие дни, когда торговались все 6 индексов. Чтобы оставить в выборке только такие дни, пришлось удалить некоторое количество наблюдений для каждого из индексов. Поэтому, строго говоря, построенные логарифмические доходности соответствуют временным промежуткам различной длины. В таблице 1 приведено распределение длин временных интервалов, соответствующих доходностям в нашей выборке.

Таблица 1. Временные интервалы доходностей

Дней между торгами	0	1	2	3	4	5	6	7
Доля в выборке, %	72,9	3,49	15,18	5,41	1,64	0,81	0,51	0,05
Накопленная доля, %	72,9	76,39	91,57	96,99	98,63	99,44	99,95	100

Двухдневные промежутки (суббота и воскресенье) неизбежны при моделировании дневных доходностей. Потенциально, проблемными могут оказаться доходности за период в 3 и более дней. Однако, как видно из таблицы, для наших данных такие доходности составляют около 8% наблюдений, что на наш взгляд является приемлемым. По этой причине мы не учитываем специфику доходностей, соответствующих промежуткам в 3 и более дней и рассматриваем все доходности как однородные.

Итоговая выбока состоит из 3952 наблюдений для каждого из 6 рядов доходностей. Построенную выборку разделяем на две части: первые 2635 наблюдений используем для оценивания моделей («внутривыборочные» наблюдения), а последние 1317 используем для оценки предсказательной способности моделей («вневыборочные» наблюдения). Таким образом, соотношение числа наблюдений внутри и вне выборки составляет 2:1. Причина такого выбора (внутри выборки наблюдений гораздо больше, чем вне ее) в том, что при меньшем числе наблюдений внутри выборки в некоторых из наших функций правдоподобия возникают

<sup>8</sup> Используется база данных Yahoo Finance <http://finance.yahoo.com>.



большие осцилляции, и это значительно ухудшает сходимость оптимизационных процедур при оценивании.

В таблице 2 представлены описательные статистики рассматриваемых рядов доходностей. Распределения всех доходностей имеют тяжелые хвосты (лептокуртозис) и отрицательную скошенность. Это два широко известных стилизованных факта о маргинальном распределении финансовых доходностей. Доходность индекса Hang-Seng имеет наибольшее стандартное отклонение и куртозис – этот индекс наиболее волатилен среди рассматриваемых. Вероятно, по этой причине мы столкнулись с особенными трудностями со сходимостью оптимизационных процедур для моделей, в которые входит Hang-Seng.<sup>9</sup>

Таблица 2. Описательные статистики для рядов логарифмических доходностей

Статистика	S&P500	FTSE100	CAC40	DAX	HANGSENG	NIKKEI225
Среднее	0,035	0,024	0,026	0,038	0,050	-0,015
Медиана	0,056	0,038	0,030	0,088	0,058	-0,011
Максимум	5,574	5,904	7,002	8,754	17,247	7,826
Минимум	-7,113	-8,565	-8,775	-10,358	-14,735	-9,754
Ст. откл.	1,059	1,096	1,388	1,473	1,715	1,499
Скошенность	-0,059	-0,099	-0,061	-0,217	-0,180	-0,007
Куртозис	6,328	6,636	6,081	7,725	12,629	5,643
Наблюдений	3952	3952	3952	3952	3952	3952

## 5.2 Корреляция

В рассматриваемых рядах логарифмических доходностей нет значимой связности. Гипотеза о постоянном нулевом условном среднем в простой AR(1) модели с константой не отвергается на 5% уровне значимости тестом Вальда для всех 6 индексов, как показано в таблице 3.

Таблица 3. Тест Вальда на постоянное нулевое условное среднее в моделях AR(1)

	S&P500	FTSE100	CAC40	DAX	HANGSENG	NIKKEI225
Статистика Вальда	4,689	2,971	1,845	2,695	3,356	1,079
(P-значение)	0,096	0,226	0,397	0,260	0,187	0,583

Таким образом, в доходностях нет значимой автокорреляции. Однако существует значимая корреляция между доходностями различных индексов. В таблице 4 приведены одновременные и лагированные корреляции доходностей рассматриваемых индексов. Корреляции в этой таблице можно объяснить географией рынков (временными зонами). Для рассматриваемых индексов время торговли определено (приблизительно) следующим образом. По московскому времени рынки в Японии и Гонконге открываются в 3:00 и закрываются в 11:00. Европейские рынки открываются в 9:00 и закрываются в 17:00. Американский рынок открывается в 16:00 и закрывается в 00:00. Динамика на рынках, на которых торгуют раньше, является информацией для тех рынков, на которых торгуют позже. Отсюда существенная положительная корреляция между лагированной доходностью S&P500 и текущей доходностью NIKKEI225 и Hang-Seng. По той же причине лагированная доходность S&P500 положительно коррелирует с текущей доходностью европейских индексов FTSE100, CAC40 и DAX. Корреляции в этом случае ниже, чем для NIKKEI225 и Hang-Seng, поскольку с момента закрытия американского рынка до момента открытия европейских рынков проходит больше времени и поступает больше информации. Аналогичные связи можно наблюдать для временных пар Восточная Азия–Европа и Европа–США.

<sup>9</sup> Эта проблема была решена, когда мы стали брать оценки параметров простых вложенных моделей в качестве стартовых значений при оценке более сложных моделей.

Таблица 4. Одновременные и лагированные корреляции доходностей

SP&500(-1)	1	-0,008	0,467	0,267	0,482	0,256	0,510	0,224	0,157	0,359	0,148	0,316
SP&500	1	0,001	0,468	0,468	0,013	0,487	-0,001	0,511	-0,017	0,156	-0,028	0,148
FTSE100(-1)	1	-0,016	0,795	1	0,001	-0,006	0,713	0,016	0,349	0,209	0,305	0,1866
FTSE100	1	0,001	0,795	1	0,001	0,795	0,011	0,713	-0,025	0,349	-0,056	0,305
CAC40(-1)	1	0,011	1	1	1	0,011	0,803	0,035	0,330	0,182	0,306	0,202
CAC40	1	0,026	1	1	1	1	0,026	0,803	-0,023	0,330	-0,046	0,306
DAX(-1)	1	-0,002	0,344	0,344	-0,002	-0,002	0,344	0,162	0,162	0,285	0,285	0,204
DAX	1	0,008	-0,008	-0,008	1	1	-0,008	0,344	0,344	-0,035	-0,035	0,285
HANGSENG(-1)	1	0,003	1	1	1	1	-0,003	-0,003	1	1	1	0,010
HANGSENG	1	-0,031	-0,031	-0,031	-0,031	-0,031	-0,031	-0,031	-0,031	-0,031	-0,031	0,420
NIKKEI225(-1)	1	0,013	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-0,013
NIKKEI225	1	0,013	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

(-1) означает лагированную доходность

Среди шести рассматриваемых нами индексов S&P500 приносит на рынок наиболее важную информацию. В то же время доходность на этот индекс не зависит существенным образом от информации о реализовавшихся доходностях на других рынках. Это продемонстрировано в таблице 5, в которой приведены оценки VAR(1)-модели для вектора доходностей всех шести рассматриваемых индексов.

Таблица 5. Оценки векторной авторегрессии для всех шести индексов

	S&P500	FTSE100	CAC40	DAX	HANGSENG	NIKKEI225
S&P500(-1)	-0,014 (0,019)	<b>0,387</b> (0,018)	<b>0,454</b> (0,024)	<b>0,424</b> (0,025)	<b>0,570</b> (0,028)	<b>0,391</b> (0,025)
FTSE100(-1)	-0,010 (0,026)	<b>-0,109</b> (0,026)	<b>-0,133</b> (0,033)	<b>-0,088</b> (0,035)	<b>0,213</b> (0,039)	0,031 (0,035)
CAC40(-1)	0,043 (0,024)	-0,016 (0,024)	-0,022 (0,030)	<b>0,096</b> (0,033)	0,017 (0,036)	0,064 (0,032)
DAX(-1)	-0,015 (0,020)	<b>-0,054</b> (0,020)	-0,043 (0,025)	<b>-0,177</b> (0,027)	<b>-0,099</b> (0,030)	0,035 (0,027)
HANGSENG(-1)	-0,007 (0,011)	0,006 (0,011)	0,001 (0,014)	0,014 (0,015)	<b>-0,045</b> (0,017)	<b>-0,038</b> (0,015)
NIKKEI225(-1)	-0,021 (0,012)	<b>-0,040</b> (0,012)	<b>-0,043</b> (0,016)	<b>-0,044</b> (0,017)	<b>-0,098</b> (0,019)	<b>-0,071</b> (0,017)
c	<b>0,036</b> (0,017)	0,015 (0,017)	0,014 (0,021)	0,028 (0,023)	0,028 (0,025)	-0,032 (0,023)

В скобках приведены QML-стандартные ошибки. Жирным показана значимость на 5% уровне.

Согласно оцененной векторной авторегрессии, лагированная доходность S&P500 имеет большое положительное влияние на доходности европейских и азиатских индексов (коэффициенты в первой строке таблицы), но в обратную сторону такого влияния нет (коэффициенты в первом столбце). Таким образом, лагированная доходность на S&P500 – особенная переменная, которая может рассматриваться как предиктор текущих доходностей на других рынках. Предполагается, что отмеченные динамические связи между доходностями индексов будут учтены моделью VAR(1) для условного среднего.

### 5.3 Волатильность

На Рис. 1 изображена динамика логарифмических доходностей рассматриваемых шести индексов.

Очевидна кластеризация волатильности, которая, как правило, наблюдается в рядах финансовых доходностей. Это также очевидно и из стандартных GARCH(1,1) моделей, результаты оценивания которых представлены в таблице 6.

Таблица 6. Оценки моделей GARCH(1,1)

Параметр	S&P500	FTSE100	CAC40
$\beta_0$	0,005 (0,003)	<b>0,013</b> (0,004)	<b>0,032</b> (0,012)
$\beta_1$	<b>0,042</b> (0,009)	<b>0,079</b> (0,011)	<b>0,068</b> (0,013)
$\beta_2$	<b>0,954</b> (0,011)	<b>0,912</b> (0,012)	<b>0,915</b> (0,016)
Параметр	DAX	HANGSENG	NIKKEI225
$\beta_0$	<b>0,034</b> (0,013)	<b>0,037</b> (0,019)	<b>0,056</b> (0,020)
$\beta_1$	<b>0,075</b> (0,013)	<b>0,075</b> (0,018)	<b>0,083</b> (0,015)
$\beta_2$	<b>0,908</b> (0,015)	<b>0,913</b> (0,021)	<b>0,894</b> (0,019)

В скобках приведены QML-стандартные ошибки.

Жирным показана значимость на 5% уровне.

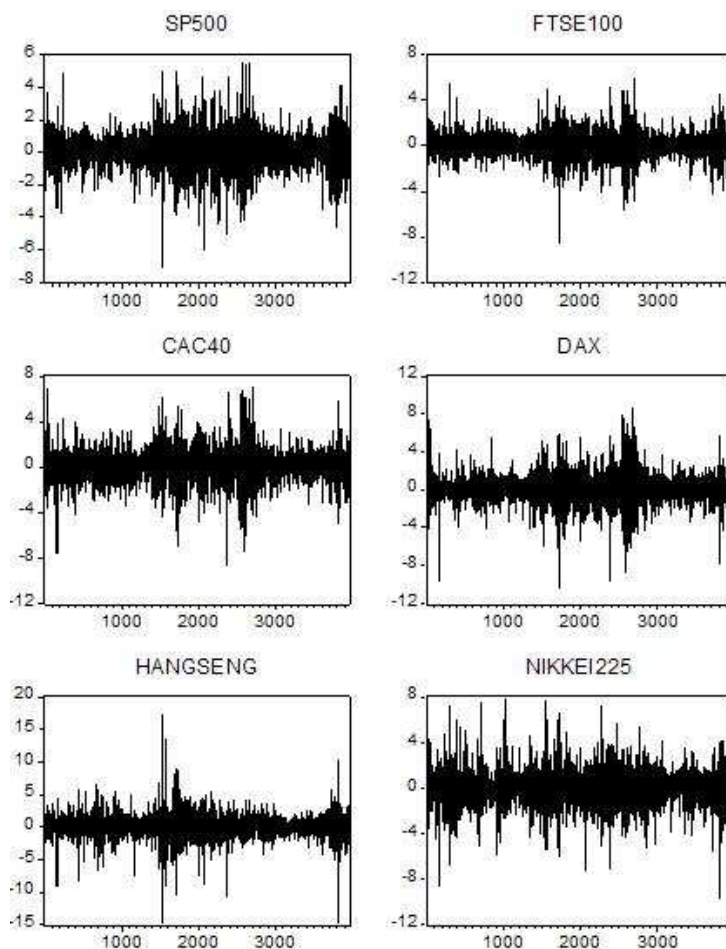


Рис. 1: Динамика логарифмических доходностей фондовых индексов

Из Рис. 1 можно также заметить, что кластеры волатильности на одном рынке, как правило, соответствуют кластерам волатильности на других рынках (например, все индексы имеют кластеры высокой волатильности в середине выборки). Таким образом, волатильности доходностей различных рынков могут быть связаны. Предполагается, что MGARCH-модель для условной ковариационной матрицы будет учитывать как индивидуальные GARCH - эффекты, так и возможную связь между волатильностями на различных рынках.

#### 5.4 Условная скошенность и куртозис

Источником отрицательной безусловной скошенности и лептокуртозиса (тяжелых хвостов) могут быть их условные аналоги.<sup>10</sup> Чтобы предварительно оценить эти величины мы проводим непараметрическую оценку одномерных условных функций плотности для рассматриваемых рядов логарифмических доходностей и по полученным оценкам функций плотности рассчитываем условную скошенность и куртозис.

Предположим, что ряд доходностей  $r_t$  является строго стационарным, так что неизвестные совместные функции плотности  $f(r_t, r_{t-1})$  и маргинальные функции плотности  $f(r_t)$  не зависят от времени. Тогда условная функция плотности  $f(r_t|r_{t-1})$  не зависит от времени и может быть оценена непараметрически (для простоты включаем в доступную информацию  $I_{t-1}$  только  $r_{t-1}$ ).

<sup>10</sup> Источником лептокуртозиса является также переменная волатильность.

Мы используем одношаговую непараметрическую оценку условной функции плотности, основанную на стандартных ядерных оценках. Пусть  $h_1$  и  $h_2$  – это ширина окон для  $r_t$  и  $r_{t-1}$  соответственно, и  $K_h(u) = h^{-1}K(u/h)$  для некоторой функции ядра  $K(x)$ . Стандартные ядерные оценки Надарая–Уотсона для совместной и маргинальной функций плотности и получаемая из них одношаговая оценка условной функции плотности имеют вид

$$\widehat{f}(y|x) = \frac{\widehat{f}(y, x)}{\widehat{f}(x)},$$

где

$$\widehat{f}(y, x) = \frac{1}{n} \sum_{t=2}^T K_{h_1}(y - r_t) K_{h_2}(x - r_{t-1}),$$

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{n} \sum_{t=2}^T K_{h_2}(x - r_{t-1}).$$

Существует также и двухшаговая непараметрическая оценка условной функции плотности, основанная на оценке функции условного среднего. Эта оценка имеет меньшее асимптотическое смещение, чем одношаговая оценка, и в общем случае она предпочтительнее.<sup>11</sup> Но мы строим непараметрические оценки условных функций плотности в целях получения предварительной оценки условной скошенности и куртозиса, и на наш взгляд, одношаговой оценки для этих целей вполне достаточно.

Итак, с помощью одношаговой процедуры мы строим оценки условных функций плотности логарифмических доходностей.<sup>12</sup> Ширина окна вычисляется по правилу Сильвермана  $h = 1.06\sigma_r T^{-1/5}$ . После оценивания каждой из условных функций плотности мы приводим ее к нулевому среднему (которое само по себе близко к нулю) и единичной дисперсии (используя оцененное среднее и дисперсию). Полученные оценки функций плотности стандартизованных ошибок при условии  $\eta_{t-1} = 0$  представлены на Рис. 2 вместе с функцией плотности стандартного нормального распределения.

Для оцененных условных функций плотности характерен лептокуртозис, но относительно отрицательной скошенности однозначных выводов сделать нельзя. В таблице 7 показаны условные скошенности и куртозисы, вычисленные по непараметрическим оценкам функций плотности. Заметим, что оценки функций плотности для FTSE100 и NIKKEI225 предполагают небольшую положительную скошенность, и этот результат устойчив к изменению ширины окна при оценивании. Для индекса Hang-Seng характерен относительно небольшой условный куртозис по сравнению с безусловным.

Таблица 7. Оценки условной скошенности и куртозиса

Статистика	S&P500	FTSE100	CAC40	DAX	HANGSENG	NIKKEI225
Скошенность	-0,510	0,014	-0,253	-0,254	-0,052	0,092
Куртозис	5,301	4,278	3,859	4,266	3,786	3,720

Предполагается, что условная скошенность и куртозис в распределении стандартизованных ошибок будут учтены с помощью рассмотренных в разделе 3 гибких параметризаций, которые предоставляют возможность управлять асимметрией и толщиной хвостов распределения.

<sup>11</sup> Описание данной оценки можно найти, например, в Hansen (2004).

<sup>12</sup> Используется пакет pr в языке программирования R.

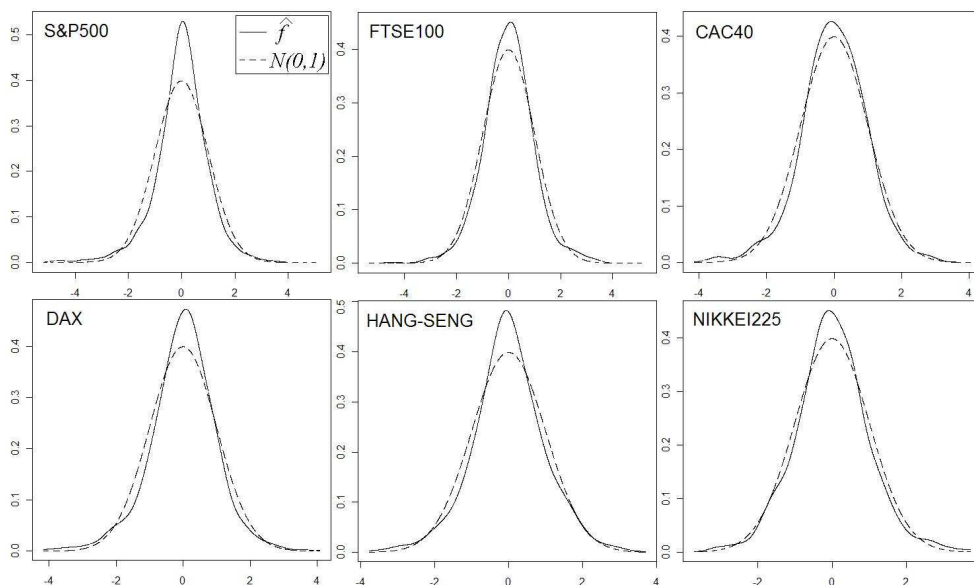


Рис. 2: Нормализованные непараметрические оценки условных функций плотности и функция плотности распределения  $N(0, 1)$

## 6 Результаты оценивания

В предыдущем разделе было отмечено, что доходности на различных рынках динамически связаны, их волатильности также динамически связаны, а условное распределение доходностей асимметрично и имеет тяжелые хвосты. Чтобы учесть все эти свойства данных, мы строим двумерные модели VAR(1)–BEKK(1,1) с функциями плотности распределения стандартизованных ошибок, рассмотренными в разделе 3, которые допускают скошенность и лептокуртозис. Каждая из этих моделей описывается уравнениями (1)–(2) и одной из функций плотности (4), (5), (7) или (8). Имеется 15 пар фондовых индексов и 4 параметризации функции плотности распределения стандартизованных ошибок – в общей сложности оценено 60 моделей.

Прежде чем анализировать полученные оценки параметров, сделаем два замечания относительно технической процедуры оценивания. Во-первых, как уже было упомянуто, функция плотности Грамма–Шарлье не является функцией плотности в соответствии со строгим определением. Для некоторых значений элементов матриц  $D_3$  и  $D_4$  она, как функция аргумента  $\eta_t$ , может иметь области отрицательных значений. Это значительно усложняет максимизацию функции правдоподобия для параметризации Грамма–Шарлье по сравнению с другими параметризациями. Вероятная причина этого, на наш взгляд, в том, что граница области положительной определенности двумерной плотности Грамма–Шарлье такова, что градиент соответствующей функции правдоподобия очень нестабилен вблизи нее. Поэтому при оценивании параметров функции плотности Грамма–Шарлье следует уделять особое внимание выбору вектора начальных значений параметров, чтобы избежать раннего прерывания оптимизационной процедуры.<sup>13</sup>

Во-вторых, поскольку количество параметров в рассматриваемых моделях различно, можно оценить, как это количество влияет на время, необходимое для сходимости процедуры максимизации функции правдоподобия. Этот вопрос имеет практическое значение, поскольку в практических расчетах число активов может быть довольно большим, что приводит к большому числу параметров. В нашем случае время, необходимое для максимизации функ-

<sup>13</sup> Мы используем процедуру оптимизации из библиотеки CML для языка GAUSS с алгоритмом спуска ВННН и методом поиска на линии STEPBT.

ции правдоподобия с параметризацией Грамма–Шарлье, имеющей 26 параметров, оказывается примерно в 4 раза большим, чем соответствующее время для скошенного нормального распределения, скошенного распределения Стьюдента и скошенного распределения GED (19, 20 и 20 параметров соответственно). Таким образом, для практического применения функция плотности Грамма–Шарлье, вероятно, имеет слишком много параметров. Однако это лишь предварительный вывод. Чтобы полноценно сравнить время оценивания моделей, необходимо рассматривать случай большого числа активов, а не только простой случай  $N = 2$ .

В таблицах 8–11 для пар S&P500–NIKKEI225 и S&P500–HANGSENG представлены результаты оценивания методом максимального квазиправдоподобия моделей VAR(1)–BEKK(1,1) с 4-мя различными параметризациями функции плотности стандартизованных ошибок. Оценивание для остальных пар индексов дает схожие результаты. Все оцененные модели имеют похожие оценки параметров в части условного среднего и ковариационной матрицы, вне зависимости от того, какую параметризацию для функции плотности распределения стандартизованных ошибок они используют. Например, для моделей, где присутствует индекс S&P500, важный коэффициент  $Q_{21}$ , отражающий влияние лагированной доходности S&P500 на текущую доходность другого индекса, всегда положителен, значим на 5% уровне значимости и имеет приблизительно одинаковые значения для различных параметризаций плотности. В уравнении динамики условной ковариационной матрицы коэффициенты  $A_{11}$ ,  $A_{22}$ ,  $B_{11}$  и  $B_{22}$  практически не зависят от используемой параметризации функции плотности. Другие параметры в уравнениях условного среднего и ковариационной матрицы более чувствительны к выбору параметризации: их Р-значения, а иногда и знак существенно зависят от выбора параметризации.

Таблица 8. Оценки VAR(1)–BEKK(1,1) модели со скошенным нормальным распределением для стандартизованных ошибок

S&P500–NIKKEI225				S&P500–HANGSENG			
$c$		$Q$		$c$		$Q$	
0,146 (0,077)	<b>0,049</b> (0,021)	–0,002 (0,011)		0,135 (0,081)	0,041 (0,021)	–0,009 (0,011)	
<b>0,252</b> (0,103)	<b>0,406</b> (0,027)	<b>–0,046</b> (0,021)		0,299 (0,161)	<b>0,522</b> (0,033)	–0,002 (0,020)	
$\Omega$				$\Omega$			
0,041 (0,030)				0,033 (0,048)			
–0,033 (0,127)	<b>0,242</b> (0,079)			0,140 (0,305)	<b>0,315</b> (0,087)		
$A$		$B$		$A$		$B$	
<b>0,160</b> (0,046)	–0,004 (0,015)	<b>0,986</b> (0,008)	0,001 (0,004)	<b>0,159</b> (0,053)	0,018 (0,019)	<b>0,988</b> (0,008)	–0,009 (0,010)
–0,070 (0,044)	<b>0,270</b> (0,042)	0,017 (0,009)	<b>0,949</b> (0,016)	–0,097 (0,067)	<b>0,340</b> (0,050)	0,029 (0,012)	<b>0,917</b> (0,027)
$\alpha$				$\alpha$			
–0,111 (0,121)				–0,103 (0,119)			
<b>–0,280</b> (0,110)				–0,230 (0,155)			

В скобках приведены QML-стандартные ошибки. Жирным выделены коэффициенты, значимо отличные от 0 или релевантного значения на 5% уровне значимости.

Таблица 9. Оценки VAR(1)–BEKK(1,1) модели со скошенным распределением Стьюдента для стандартизованных ошибок

S&P500–NIKKEI225				S&P500–HANGSENG			
$c$		$Q$		$c$		$Q$	
<b>0,117</b> (0,043)		0,032 (0,019)	–0,006 (0,010)	<b>0,118</b> (0,044)		0,024 (0,019)	–0,004 (0,009)
0,076 (0,070)		<b>0,405</b> (0,025)	<b>–0,048</b> (0,018)	<b>0,156</b> (0,068)		<b>0,501</b> (0,029)	0,002 (0,019)
$\Omega$				$\Omega$			
0,031 (0,021)				0,034 (0,020)			
–0,062 (0,101)	<b>0,180</b> (0,058)			–0,032 (0,087)	<b>0,207</b> (0,052)		
$A$		$B$		$A$		$B$	
<b>0,136</b> (0,030)	0,001 (0,010)	<b>0,986</b> (0,006)	–0,001 (0,004)	<b>0,142</b> (0,026)	0,005 (0,009)	<b>0,985</b> (0,005)	–0,002 (0,004)
–0,029 (0,044)	<b>0,227</b> (0,023)	0,013 (0,010)	<b>0,951</b> (0,010)	–0,029 (0,046)	<b>0,265</b> (0,040)	0,014 (0,011)	<b>0,938</b> (0,019)
$\xi$				$\xi$			
–0,092 (0,078)				–0,099 (0,077)			
–0,135 (0,080)				–0,100 (0,074)			
$\nu$				$\nu$			
<b>6,671</b> (0,585)				<b>6,659</b> (0,605)			

Таблица 10. Оценки VAR(1)–BEKK(1,1) модели со скошенным распределением GED для стандартизованных ошибок

S&P500–NIKKEI225				S&P500–HANGSENG			
$c$		$Q$		$c$		$Q$	
<b>0,099</b> (0,032)		0,023 (0,020)	–0,007 (0,010)	<b>0,096</b> (0,032)		0,012 (0,020)	–0,003 (0,010)
–0,017 (0,043)		<b>0,410</b> (0,026)	<b>–0,052</b> (0,018)	<b>0,106</b> (0,046)		<b>0,505</b> (0,030)	–0,001 (0,019)
$\Omega$				$\Omega$			
0,036 (0,020)				0,034 (0,022)			
–0,046 (0,097)	<b>0,206</b> (0,056)			–0,011 (0,120)	<b>0,250</b> (0,058)		
$A$		$B$		$A$		$B$	
<b>0,141</b> (0,030)	–0,001 (0,010)	<b>0,986</b> (0,006)	–0,000 (0,003)	<b>0,146</b> (0,026)	0,008 (0,010)	<b>0,986</b> (0,005)	–0,004 (0,004)
–0,025 (0,042)	<b>0,235</b> (0,026)	0,012 (0,009)	<b>0,950</b> (0,011)	–0,044 (0,048)	<b>0,284</b> (0,042)	0,019 (0,011)	<b>0,931</b> (0,021)
$\xi$				$\xi$			
<b>0,956</b> (0,024)				<b>0,957</b> (0,024)			
<b>0,982</b> (0,022)				<b>0,967</b> (0,023)			
$\kappa$				$\kappa$			
<b>0,805</b> (0,030)				<b>0,814</b> (0,034)			

В скобках приведены QML-стандартные ошибки. Жирным выделены коэффициенты, значимо отличные от 0 или релевантного значения на 5% уровне значимости.



Таблица 11. Оценки VAR(1)–BEKK(1,1) модели с распределением Грамма–Шарлье для стандартизованных ошибок

S&P500–NIKKEI225				S&P500–HANGSENG			
$c$		$Q$		$c$		$Q$	
<b>0,052</b> (0,017)		0,031 (0,019)	–0,004 (0,010)	<b>0,050</b> (0,017)		0,027 (0,020)	–0,008 (0,009)
–0,039 (0,026)		<b>0,408</b> (0,025)	<b>–0,052</b> (0,019)	0,036 (0,029)		<b>0,514</b> (0,031)	–0,007 (0,020)
$\Omega$				$\Omega$			
0,034 (0,026)				0,025 (0,035)			
–0,134 (0,140)	0,207 (0,119)			0,134 (0,327)	<b>0,313</b> (0,089)		
$A$		$B$		$A$		$B$	
<b>0,156</b> (0,039)	–0,006 (0,011)	<b>0,988</b> (0,006)	0,002 (0,003)	<b>0,153</b> (0,041)	0,011 (0,015)	<b>0,990</b> (0,005)	–0,006 (0,007)
–0,059 (0,040)	<b>0,250</b> (0,032)	0,016 (0,008)	<b>0,954</b> (0,012)	–0,043 (0,070)	<b>0,325</b> (0,061)	0,020 (0,011)	<b>0,925</b> (0,030)
$D_3$				$D_3$			
–0,078 (0,075)	–0,012 (0,034)	–0,012 (0,034)	0,014 (0,033)	–0,084 (0,074)	<b>–0,071</b> (0,034)	<b>–0,071</b> (0,034)	0,062 (0,033)
–0,012 (0,034)	0,014 (0,033)	0,014 (0,033)	0,056 (0,067)	<b>–0,071</b> (0,034)	0,062 (0,033)	0,062 (0,033)	–0,082 (0,073)
$D_4$				$D_4$			
<b>4,208</b> (0,176)	–0,025 (0,076)	–0,025 (0,076)	<b>1,183</b> (0,057)	<b>4,193</b> (0,168)	–0,031 (0,073)	–0,031 (0,073)	<b>1,179</b> (0,063)
–0,025 (0,076)	<b>1,183</b> (0,057)	<b>1,183</b> (0,057)	0,028 (0,078)	–0,031 (0,073)	<b>1,179</b> (0,063)	<b>1,179</b> (0,063)	0,132 (0,084)
–0,025 (0,076)	<b>1,183</b> (0,057)	<b>1,183</b> (0,057)	0,028 (0,078)	–0,031 (0,073)	<b>1,179</b> (0,063)	<b>1,179</b> (0,063)	0,132 (0,084)
<b>1,183</b> (0,057)	0,028 (0,078)	0,028 (0,078)	<b>4,031</b> (0,163)	<b>1,179</b> (0,063)	0,132 (0,084)	0,132 (0,084)	<b>4,082</b> (0,171)

В скобках приведены QML-стандартные ошибки. Жирным выделены коэффициенты, значимо отличные от 0 или релевантного значения на 5% уровне значимости.

Таблицы 8–11 показывают, что все оцененные условные функции плотности имеют отрицательную скошенность вдоль обеих осей. Для параметризации со скошенным нормальным распределением (таблица 8) оценки обеих компонент вектора скошенности  $\alpha$  отрицательны, так же как и для вектора  $\xi$  в параметризации со скошенным распределением Стьюдента (таблица 9). Модель со скошенным распределением GED (таблица 10) также характеризуется отрицательной скошенностью, поскольку обе компоненты вектора  $\xi$  в ней меньше единицы. Наконец, параметризация с распределением Грамма–Шарлье (таблица 11) имеет отрицательные оценки для некоторых третьих моментов в матрице  $D_3$ , что также означает наличие отрицательной скошенности.

Модель со скошенным нормальным распределением не может учесть толщину многомерных хвостов распределения, поскольку в ней отсутствуют соответствующие параметры, но, как видно из таблиц 9–11, остальные модели указывают на наличие многомерных тяжелых хвостов. Оценка параметра степеней свободы  $\nu$  в модели со скошенным распределением Стьюдента невелика, что означает наличие тяжелых многомерных хвостов. Модель со скошенным распределением GED дает оценку параметра  $\kappa$ , меньшую единицы, что также указывает на тяжелые многомерные хвосты. Наконец, параметризация Грамма–Шарлье дает такую оценку матрицы  $D_4$ , которая также подразумевает тяжелые многомерные хвосты: элементы этой матрицы, равные 1 и 3 в случае нормальности, статистически значимо превышают соответственно 1 и 3 в оцененной модели с распределением Грамма–Шарлье.

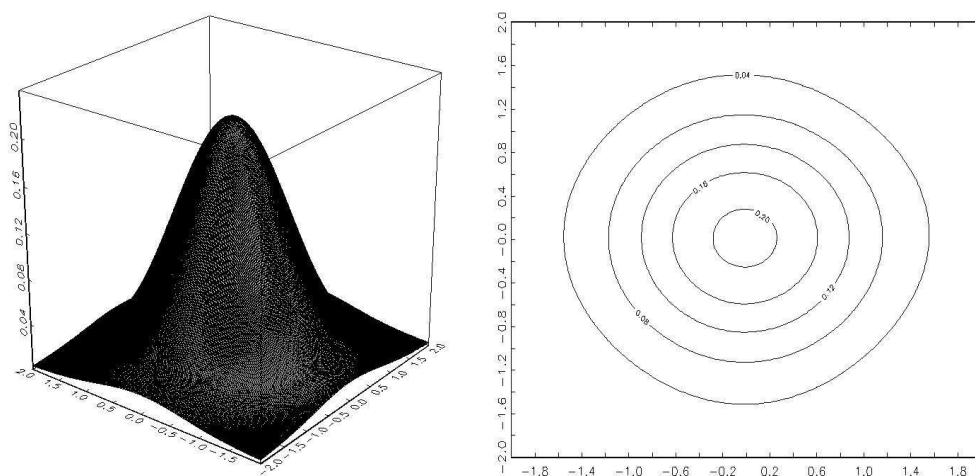


Рис. 3: Поверхность и линии уровня оцененной функции плотности распределения Грамма–Шарлье для стандартизованных ошибок (пара S&P500–NIKKEI225)

Все четыре оцененные функции плотности визуально похожи. На Рис. 3 для пары S&P500–NIKKEI225 изображены поверхность и линии уровня оцененной условной функции плотности распределения вектора стандартизованных ошибок с параметризацией Грамма–Шарлье, при условии  $\eta_{t-1} = 0$ . Существенной асимметрии функции плотности на Рис. 3 не наблюдается.

## 7 Результаты сравнения

В этом разделе приведены результаты KLIC-теста для всех описанных параметризаций и пар фондовых индексов. Тестирование проведено отдельно внутри и вне выборки. В таблице 12 приведены результаты KLIC-теста внутри выборки оценивания, а в таблице 13 – результаты теста вне ее.

Внутривыборочный KLIC-тест сопоставляет качество подгонки двух моделей. Вневыборочный KLIC-тест сопоставляет качество прогнозов условной функции плотности, полученных на основе двух моделей. Для теста ‘M1 vs M2’ («Модель 1 против Модели 2») KLIC-статистика вычисляется как разница значений функций правдоподобия Модели 1 и Модели 2. Поэтому на 5% уровне значимости выполнение условия  $KLIC > 1,96$  означает, что Модель 1 предпочтительнее Модели 2, а условие  $KLIC < -1,96$  означает, что предпочтительнее Модель 2. Если же  $-1,96 < KLIC < 1,96$ , то Модели 1 и 2 признаются эквивалентными на 5% уровне значимости.

Таблицы 12 и 13 показывают, что сравнение оцененных нами моделей в большинстве случаев однозначно и почти не зависит от рассматриваемой пары фондовых индексов.

Модель со скошенным нормальным распределением для стандартизованных ошибок доминируется всеми остальными моделями как внутри, так и вне выборки оценивания. Этот результат ожидаем, поскольку данная параметризация не учитывает важную характеристику распределения доходностей – тяжелые хвосты, а остальные параметризации ее учитывают.

Модель со скошенным распределением Стьюдента доминирует модель со скошенным распределением GED внутри выборки оценивания, а вне ее эти модели, в целом, эквивалентны. Соответствующие функции плотности имеют одинаковое число параметров и строятся по одному и тому же принципу: в обеих есть вектор направлений скошенности и параметр, контролирующий величину вероятностной массы в центре распределения. Однако данные функции плотности отличаются тем, каким образом вектор направлений скошенности и параметр тяжести хвостов в них входят. Судя по результатам сравнений, параметризация со скошен-

ным распределением Стьюдента является более гибкой, чем параметризация со скошенным распределением GED, то есть позволяет модели лучше соответствовать данным внутри выборки оценивания. Однако при этом данная гибкость не дает существенного выигрыша в точности предсказаний условной функции плотности вне выборки оценивания, и поэтому по предсказательной способности модели со скошенными распределениями Стьюдента и GED эквивалентны.

Таблица 12. Результаты KLIC-теста внутри выборки оценивания (2635 наблюдений)

Пара индексов	SN-SS	SN-SG	SN-GC	SS-SG	SS-GC	SG-GC
S&P500-FTSE100	-4,893	-4,586	-5,107	3,118	<b>1,127</b>	<b>-0,745</b>
S&P500-CAC40	-4,219	-4,287	-4,458	2,065	2,212	<b>1,806</b>
S&P500-DAX	-3,672	-3,727	-5,083	2,808	<b>1,946</b>	<b>1,343</b>
S&P500-HANGSENG	-4,204	-4,285	-5,381	2,780	2,186	<b>1,702</b>
S&P500-NIKKEI225	-5,199	-4,996	-5,272	3,663	3,166	2,046
FTSE100-CAC40	-3,692	-3,545	-3,866	2,954	2,690	<b>1,953</b>
FTSE100-DAX	-3,040	-2,995	-3,822	2,737	1,981	<b>1,508</b>
FTSE100-HANGSENG	-4,131	-3,992	-4,478	3,074	2,345	<b>1,462</b>
FTSE100-NIKKEI225	-4,424	-4,157	-3,232	2,983	3,450	2,840
CAC40-DAX	-2,719	-2,650	-3,606	2,589	<b>1,740</b>	<b>1,165</b>
CAC40-HANGSENG	-3,263	-3,363	-4,030	2,154	<b>1,800</b>	<b>1,515</b>
CAC40-NIKKEI225	-3,479	-3,416	-3,589	2,531	2,100	<b>1,584</b>
DAX-HANGSENG	-3,658	-3,790	-2,963	2,453	2,837	2,815
DAX-NIKKEI225	-3,453	-3,556	-4,868	2,513	<b>1,944</b>	<b>1,632</b>
HANGSENG-NIKKEI225	-4,100	-3,831	-4,127	3,744	2,915	2,215

SN – скош. нормальное, SS – скош. Стьюдента, SG – скош. GED, GC – Грамма-Шарлье

‘M1 vs M2’:  $KLIC > 1,96 \Rightarrow M1$  лучше,  $KLIC < -1,96 \Rightarrow M2$  лучше (5% уровень значимости)

Таблица 13. Результаты KLIC-теста вне выборки оценивания (1317 наблюдений)

Пара индексов	SN-SS	SN-SG	SN-GC	SS-SG	SS-GC	SG-GC
S&P500-FTSE100	-3.142	-3.533	-3.062	<b>0.609</b>	2.083	2.445
S&P500-CAC40	-4.303	-5.021	-3.141	<b>-0.722</b>	3.702	4.861
S&P500-DAX	-3.963	-4.924	-3.175	<b>-1.191</b>	3.505	5.091
S&P500-HANGSENG	-4.199	-4.539	-3.133	<b>0.509</b>	4.029	4.638
S&P500-NIKKEI225	-3.151	-3.082	<b>-1.832</b>	<b>1.706</b>	3.655	3.636
FTSE100-CAC40	-14.483	-11.224	-7.004	4.316	18.521	10.588
FTSE100-DAX	-8.103	-8.432	-8.028	<b>1.400</b>	4.684	4.966
FTSE100-HANGSENG	-5.123	-4.970	-4.257	2.186	3.676	3.397
FTSE100-NIKKEI225	-3.771	-3.451	-2.210	2.599	3.789	3.204
CAC40-DAX	-4.853	-6.130	-5.774	<b>-2.736</b>	<b>1.721</b>	3.320
CAC40-HANGSENG	-4.033	-4.133	-3.469	<b>1.738</b>	3.128	3.235
CAC40-NIKKEI225	-4.049	-3.293	-2.306	3.421	4.108	2.945
DAX-HANGSENG	-3.612	-4.098	-2.106	<b>0.381</b>	3.554	4.286
DAX-NIKKEI225	-2.963	-2.993	<b>-1.569</b>	<b>1.170</b>	3.072	3.271
HANGSENG-NIKKEI225	-5.712	-5.826	-3.300	<b>0.645</b>	5.773	6.511

SN – скош. нормальное, SS – скош. Стьюдента, SG – скош. GED, GC – Грамма-Шарлье

‘M1 vs M2’:  $KLIC > 1,96 \Rightarrow M1$  лучше,  $KLIC < -1,96 \Rightarrow M2$  лучше (5% уровень значимости)

Примечательно, что модель с распределением Грамма-Шарлье доминируется вне выборки оценивания моделями со скошенными распределениями Стьюдента и GED. Этот результат неожидан, поскольку функция плотности Грамма-Шарлье имеет существенно больше параметров, чем функции плотности скошенных распределений Стьюдента и GED. Больше число параметров дает большую гибкость распределению Грамма-Шарлье, и тем не

менее даже внутри выборки оно оказывается лишь эквивалентным скошенному распределению GED, а скошенному распределению Стьюдента даже проигрывает. На наш взгляд, можно предложить следующее объяснение этим результатам. Вспомним, что для некоторых значений параметров функция плотности Грамма–Шарлье теряет положительную определенность. Далее вспомним, что параметры функции плотности Грамма–Шарлье в наших моделях соответствуют нормализованным условным третьим и четвертым моментам двумерного распределения доходностей. Вероятно, истинные условные моменты распределения доходностей таковы, что функция плотности Грамма–Шарлье не является положительно определенной, если в качестве значений ее параметров подставить эти моменты (в предположении, что они постоянны). Если это так, то процедура максимизации функции правдоподобия выберет матрицы  $D_3$  и  $D_4$ , заведомо отличающиеся от истинных матриц третьих и четвертых моментов.<sup>14</sup> Это и может быть причиной низкого качества подгонки и предсказательной способности модели с распределением Грамма–Шарлье. К сожалению, мы не можем явным образом проверить данное предположение, поскольку истинные третьи и четвертые условные моменты распределения доходностей ненаблюдаемы.

Таким образом, на основе проведенного с помощью KLIC-теста попарного сравнения рассмотренных моделей можно заключить, что скошенное распределение Стьюдента дает наилучшее качество подгонки, и так же как и скошенное распределение GED – наилучшую предсказательную способность. Распределение на основе разложения Грамма–Шарлье, что неожиданно, показывает более низкое качество подгонки и предсказательной способности, особенно в сравнении со скошенным распределением Стьюдента. Наконец, скошенное нормальное распределение, что вполне ожидаемо, дает самое низкое качество подгонки и предсказательную способность среди рассмотренных распределений.

В заключение отметим, что глядя на данные результаты, необходимо помнить, что KLIC-тест может быть некорректным, если дисперсия  $\omega^*$  логарифмической разности сравниваемых функций плотности близка к нулю, о чем упоминалось в разделе 4. В данной работе мы не проводим предварительного тестирования гипотезы  $\omega^* = 0$ , и наши результаты надежны настолько, насколько данная гипотеза не соответствует действительности.

## 8 Выводы

В данной работе произведена оценка двумерных моделей VAR(1)–BEKK(1,1) для логарифмических доходностей индексов крупнейших мировых фондовых рынков. Для моделирования условной функции плотности стандартизованных ошибок были использованы 4 спецификации: скошенное нормальное распределение, скошенное распределение Стьюдента, скошенное распределение GED и распределение Грамма–Шарлье.

Для простоты процедуры сравнения моделей предполагалось постоянство параметров распределения стандартизованных ошибок. Используя тест, основанный на информационном критерии Кульбака–Лейблера, мы провели попарное сравнение оцененных моделей. В результате сравнений получен следующий ранжированный список распределений стандартизованных ошибок. По качеству подгонки модели внутри выборки оценивания: 1 – скошенное распределение Стьюдента, 2 – скошенное распределение GED и распределение Грамма–Шарлье, 3 – скошенное нормальное распределение. По предсказательной способности модели вне выборки оценивания: 1 – скошенное распределение Стьюдента и скошенное распределение GED, 2 – распределение Грамма–Шарлье, 3 – скошенное нормальное распределение.

Предположение о постоянных параметрах распределения стандартизованных ошибок упрощает сравнение функций плотности. Однако не исключено, что при этом оцененные нами модели могут иметь достаточно низкое качество подгонки и предсказательной способности

<sup>14</sup> Процедурой будут рассматриваться только такие матрицы  $D_3$  и  $D_4$ , для которых функция плотности Грамма–Шарлье является положительно определенной.

в некотором абсолютном смысле, например, с точки зрения распределения их обобщенных остатков.<sup>15</sup> Поэтому важное направление дальнейшей работы – оценка качества рассмотренных моделей именно в абсолютном смысле.

Другое возможное продолжение данной работы – отказаться от постоянства параметров распределения стандартизованных ошибок и рассмотреть различные модели изменения этих параметров, а затем для каждой из них сравнить соответствующие функции плотности распределения доходностей. Учет изменения параметров во времени может улучшить качество данных моделей в абсолютном смысле.

Еще одним из направлений дальнейших исследований может быть поиск возможностей улучшения качества моделей за счет смешения различных функций плотности. Например, интерес может представлять нахождение функции плотности, которая при смешении с функцией плотности скошенного распределения Стьюдента улучшает качество подгонки и предсказательную способность соответствующей модели.

## 9 Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, профессору РЭШ Станиславу Анатольеву за ценные замечания, в особенности, за идею расширить работу с многомерным распределением Грамма–Шарлье и рассмотреть другие конкурирующие параметризации для условной функции плотности распределения доходностей. Автор также благодарен своим коллегам по исследованиям в РЭШ – Юрию Бедному, Максиму Спирыеву и Родиону Ломиворотову – за плодотворные обсуждения. Наконец, автор благодарит своего сокурсника Александра Степанова за полезные советы о библиотеках языка программирования R. Автор несет ответственность за все возможные ошибки и неточности.

## Приложение

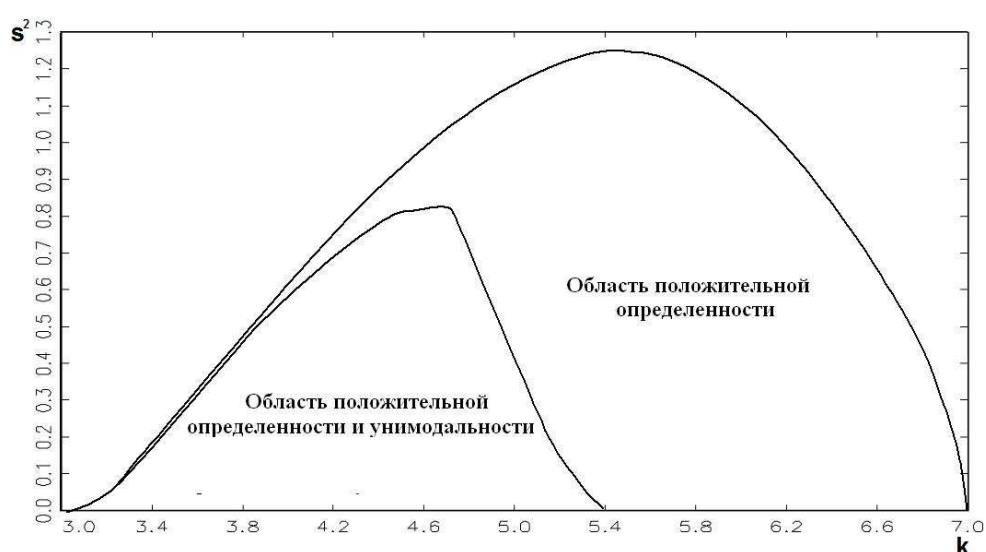


Рис. 4: Область положительной определенности для одномерной функции плотности распределения Грамма–Шарлье

<sup>15</sup> Один из первых методов оценки качества модели на основе анализа распределения обобщенных остатков предложен в Diebold, Gunther & Tay (1998).

## Список литературы

- Azzalini, A. & A. Capitanio (1999). Statistical applications of the multivariate skew normal distribution. *Journal of the Royal Statistical Society B* 61, 579–602.
- Azzalini, A. & A. Dalla Valle (1996). The multivariate skew-normal distribution. *Biometrika* 83, 715–726.
- Bauwens, L. & S. Laurent (2005). A new class of multivariate skew densities, with application to generalized autoregressive conditional heteroscedasticity models. *Journal of Business and Economic Statistics* 23, 346–354.
- Del Brio, E., T. Niguez & J. Perote (2008). Multivariate Gram–Charlier densities. *Working paper*. Доступно на <http://mpira.ub.uni-muenchen.de/29073>.
- Diebold, F., T. Gunther & A. Tay (1998). Evaluating density forecasts with applications to financial risk management. *International Economic Review* 39, 863–883.
- Engle, R. (2002). Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity models. *Journal of Business and Economic Statistics* 20, 339–350.
- Engle, R., & K. Kroner (1995). Multivariate simultaneous generalized ARCH. *Econometric Theory* 11, 122–150.
- Fernandez, C., J. Osiewalski & M. Steel (1995). Modeling and inference with  $v$ -spherical distributions. *Journal of the American Statistical Association* 90, 1331–1340.
- Giller, G. (2005). A generalized error distribution. *Giller Investments Research Note* 20031222/1. Доступно на <http://www.gillerinvestments.com/Downloader/Files/A%20Generalized%20Error%20Distribution.pdf>.
- Hansen, B. (2004). Nonparametric conditional density estimation. *Working paper*, University of Wisconsin. Доступно на <http://www.ssc.wisc.edu/~bhansen/papers/ncde.pdf>.
- Hong, Y., H. Li & F. Zhao (2007). Can the random walk model be beaten in out-of-sample density forecasts? Evidence from intraday foreign exchange rates. *Journal of Econometrics* 141, 736–776.
- Leon, A., G. Rubio & G. Serna (2005). Autoregressive conditional volatility, skewness and kurtosis. *Quarterly Review of Economics and Finance* 45, 599–618.
- Silvennoinen, A. & T. Terasvirta (2008). Multivariate GARCH models. *SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance* 669. Доступно на <http://swopec.hhs.se/hastef/papers/hastef0669.pdf>.
- Vuong, Q.H. (1989). Likelihood ratio tests for model selection and non-nested hypotheses. *Econometrica* 57, 307–333.

# Modeling multivariate parametric densities of financial returns

Alexey Balaev

*Higher School of Economics, Moscow, Russia*

This paper compares several bivariate conditional density parameterizations for stock market returns in terms of in-sample fit and out-of-sample predictive ability for the whole conditional density. We consider Skew-Normal, Skew-Student, Skew-GED and Gram–Charlier densities. We focus on the ability of these density specifications to capture asymmetry and so called ‘multivariate tails’. Using a test based on Kullback–Leibler information criterion we conduct pairwise comparisons of estimated conditional density models in sample and out of sample. The models are ranked according to their quality of fit and predictive ability. We discuss the causes behind superiority of this or that density specification.

*Keywords:* conditional density, Gram–Charlier expansion, skewed distribution, quality of fit, predictive ability

*JEL Classification:* C14, C16, C22, C32, C51, C53, C58