

# Статьи: финансы

## Оценка волатильности на основе экстремумов моста<sup>\*</sup>

Светлана Лапинова

*Нижегородский филиал Высшей Школы Экономики, Россия*

Александр Саичев<sup>†</sup>

*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Россия  
Швейцарский федеральный технологический институт, Цюрих, Швейцария*

Мария Тараканова

*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Россия*

Обсуждаются свойства оценки волатильности, пропорциональной квадрату колебания моста, образованного из приращений логарифма цены финансового инструмента на заданном интервале времени. В рамках модели геометрического броуновского движения для приращений цены показано с помощью теоретических расчетов и статистических симуляций, что исследуемая оценка на основе моста существенно эффективней, чем известные оценки Паркинсона и Гармана—Класса. Обсуждается также возможное использование исследуемых в статье оценок для оценки интегрированной волатильности.

*Ключевые слова: волатильность, оценки волатильности, эффективность, смещенность, экстремумы броуновского движения*

*Классификация JEL: C11, C14, C15*

## 1 Введение

Оценивание волатильности финансовых рынков, индексов и цен акций — одна из важных проблем эконометрики. Чем эффективнее оценки волатильности, тем адекватнее можно предсказать дальнейшее поведение рынка, по крайней мере в краткосрочной перспективе. Сравнительно эффективные оценки волатильности удается получить, используя квадратичные комбинации максимума и минимума цены на заданном временном интервале (см., например, Zhang, Mykland & Ait-Sahalia 2005, Martens & van Dijk 2007, Slepaczuk & Zakrzewski 2009, Saichev & Sornette 2011 и цитируемую литературу). Разработка подобных оценок волатильности ведется с восьмидесятых годов прошлого века. Наиболее известны из них *оценка Паркинсона* (Parkinson 1980), а также *оценка Гармана—Класса* (Garman & Klass 1980). Мы назовем их кратко — Park и GK оценки.

При известных преимуществах указанных оценок, они имеют общий недостаток: при дрейфе (росте или падении) цены, Park и GK оценки смещены и менее эффективны, чем при «боковом движении рынка», когда дрейф нулевой. В нашей работе подробно обсуждается введенная Kunitomo (1992) оценка волатильности, эффективность которой не зависит от дрейфа. Как и Park оценка, она пропорциональна квадрату разности экстремальных значений. Однако в нее входят экстремумы не логарифма приращения цены, а построенного на

<sup>\*</sup>Цитировать как: Лапинова, Светлана, Александр Саичев и Мария Тараканова (2012) «Оценка волатильности на основе экстремумов моста», Квантиль, №10, стр. 73–90. Citation: Lapinova, Svetlana, Alexander Saichev & Maria Tarakanova (2012). “Volatility estimation based on extremes of the bridge,” Quantile, No.10, pp. 73–90.

<sup>†</sup>Адрес: 603950, г. Нижний Новгород, проспект Гагарина, 23. Электронная почта: saichev@hotmail.com

их основе моста. Строгое определение моста дано ниже. Здесь же мы заметим лишь, что обсуждаемая оценка волатильности при любом дрейфе несмещена и более эффективна, чем Park и GK оценки.

В статье обсуждается также применение указанных выше оценок для оценивания интегрированной волатильности. Эффективность данных оценок интегрированной волатильности сравнивается с эффективностью реализованной волатильности.

## 2 Примеры оценок волатильности

Ниже при обсуждении оценок волатильности будем говорить о зависимости от времени  $t$  цены  $P(t)$  некоторого финансового инструмента. Как правило, при измерении волатильности используют логарифм цены, то есть случайный процесс  $X(t) := \ln P(t)$ . Волатильностью цены на заданном интервале времени длительности  $T$  часто называют дисперсию приращения логарифма цены на указанном временном интервале.

Приведем сопутствующие понятию волатильности математические соотношения. Для этого введем новый случайный процесс  $Y(t, T)$ , равный приращению  $Y(t, T) := X(t+T) - X(t)$  логарифма цены на промежутке времени  $(t, t+T)$ . Дисперсия данного приращения равна

$$\mathbb{V}[Y(t, T)] := \mathbb{E}[Y^2(t, T)] - \mathbb{E}^2[Y(t, T)].$$

Именно ее мы и называем в дальнейшем волатильностью  $V(T)$  на интервале времени  $(t, t+T)$  длительности  $T$ :  $V(T) := \mathbb{V}[Y(t, T)]$ .

Напомним, Park и GK оценки волатильности содержат максимум и минимум приращений логарифма цены:

$$H := \max_{t' \in (0, T)} Y(t, t'), \quad L := \min_{t' \in (0, T)} Y(t, t'). \quad (1)$$

При этом Park оценка равна

$$\hat{V}_p := (H - L)^2 / \ln 16, \quad (2)$$

а GK оценка задана выражением

$$\hat{V}_g := k_1(H - L)^2 - k_2(C(H - L) - 2HL) - k_3C^2, \quad (3)$$

где  $k_1 = 0,511$ ,  $k_2 = 0,0109$ ,  $k_3 = 0,383$ . Обратим внимание что GK оценка использует помимо экстремумов (1) еще и величину  $C := Y(t, T)$ .<sup>1</sup>

Перед тем как определить изученную в статье оценку волатильности, определим мост приращения логарифма цены. Он задан равенством

$$Z(t, t') := Y(t, t') - \frac{t'}{T} Y(t, T), \quad t' \in (0, T).$$

Термин «мост» отражает тот факт, что на краях интервала  $(t, t+T)$  он равен нулю:  $Z(t, 0) = Z(t, T) \equiv 0$ . Введем максимум и минимум моста

$$\mathcal{H} := \max_{t' \in (0, T)} Z(t, t'), \quad \mathcal{L} := \min_{t' \in (0, T)} Z(t, t'). \quad (4)$$

Соответственно, обсуждаемая оценка волатильности равна

$$\hat{V}_b := \kappa (\mathcal{H} - \mathcal{L})^2. \quad (5)$$

Фактор  $\kappa$  вычислен в разделе 4. Ниже будем называть  $\hat{V}_b$  оценкой моста.

<sup>1</sup>То есть логарифм цены закрытия интервала  $(t, t+T)$ .

### 3 Геометрическое броуновское движение

Одной из моделей поведения цены служит *геометрическое броуновское движение* (ГБД), см., например, Jeanblanc, Yor & Chesney (2009) и Saichev, Malevergne & Sornette (2010). В частности, эту модель применяют при расчете эффективности Park и ГК оценок. Ниже, сравнивая эффективность оценок волатильности, мы будем опираться на ГБД модель. В ее рамках процесс  $Y(t, T)$  представим в виде броуновского движения с дрейфом:

$$Y(t, T) = \mu T + \sigma B(T). \quad (6)$$

Здесь  $\mu$  — скорость дрейфа логарифма цены, которую назовем для краткости *дрейфом*,  $B(t)$  — стандартное броуновское движение, то есть гауссов процесс  $B(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$ , обладающий свойством самоподобия

$$B(t) \sim \sqrt{T} B\left(\frac{t}{T}\right), \quad \forall T > 0. \quad (7)$$

Знак  $\sim$  означает статистическую эквивалентность. Пользуясь свойством (7), легко убедиться в справедливости соотношения

$$Y(t, t') \sim \sigma \sqrt{T} x(\tau, \gamma),$$

где

$$x(\tau, \gamma) := \gamma \tau + B(\tau), \quad \gamma := \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{T}, \quad \tau := \frac{t'}{T} \in (0, 1). \quad (8)$$

Назовем  $x(\tau, \gamma)$  *каноническим броуновским движением*, а  $\gamma$  — *каноническим дрейфом*. Пользуясь равенствами (2), (3), (5) и (8), найдем что

$$\hat{V}_p \sim V(T) \cdot \hat{v}_p(\gamma), \quad \hat{V}_g \sim V(T) \cdot \hat{v}_g(\gamma), \quad \hat{V}_b \sim V(T) \cdot \hat{v}_b,$$

где  $V(T) = \sigma^2 T$ , и где фигурируют *канонические оценки* волатильности

$$\hat{v}_p(\gamma) := \frac{d^2}{\ln 16}, \quad \hat{v}_b := \kappa s^2, \quad \hat{v}_g(\gamma) := k_1 d^2 - k_2 (cd - 2hc) - k_3 c^2, \quad (9)$$

где  $d := h - l$ ,  $s := \xi - \zeta$ , содержащие случайные величины

$$h := \max_{\tau \in (0,1)} x(\tau, \gamma), \quad l := \min_{\tau \in (0,1)} x(\tau, \gamma), \quad c := x(1, \gamma), \quad (10)$$

а также максимум и минимум канонического моста

$$\xi := \max_{\tau \in (0,1)} z(\tau), \quad \zeta := \min_{\tau \in (0,1)} z(\tau), \quad (11)$$

где

$$z(\tau) := x(\tau, \gamma) - \tau x(1, \gamma) = B(\tau) - \tau \cdot B(1), \quad \tau \in (0, 1).$$

Реализации канонических броуновского движения  $x(\tau, \gamma)$  (8) при  $\gamma = 1$  и моста  $z(\tau)$  (11) даны на Рис. 1.

В следующих разделах мы сравним математические ожидания и дисперсии канонических оценок (9). Отметим, что чем ближе математические ожидания канонических оценок  $\hat{v}_p(\gamma)$ ,  $\hat{v}_g(\gamma)$  и  $\hat{v}_b$  к единице, тем менее смещены оценки волатильности  $\hat{V}_p$ ,  $\hat{V}_g$  и  $\hat{V}_b$ . При этом чем меньше дисперсии канонических оценок, тем эффективнее исходные оценки  $\hat{V}_p$ ,  $\hat{V}_g$  и  $\hat{V}_b$ .

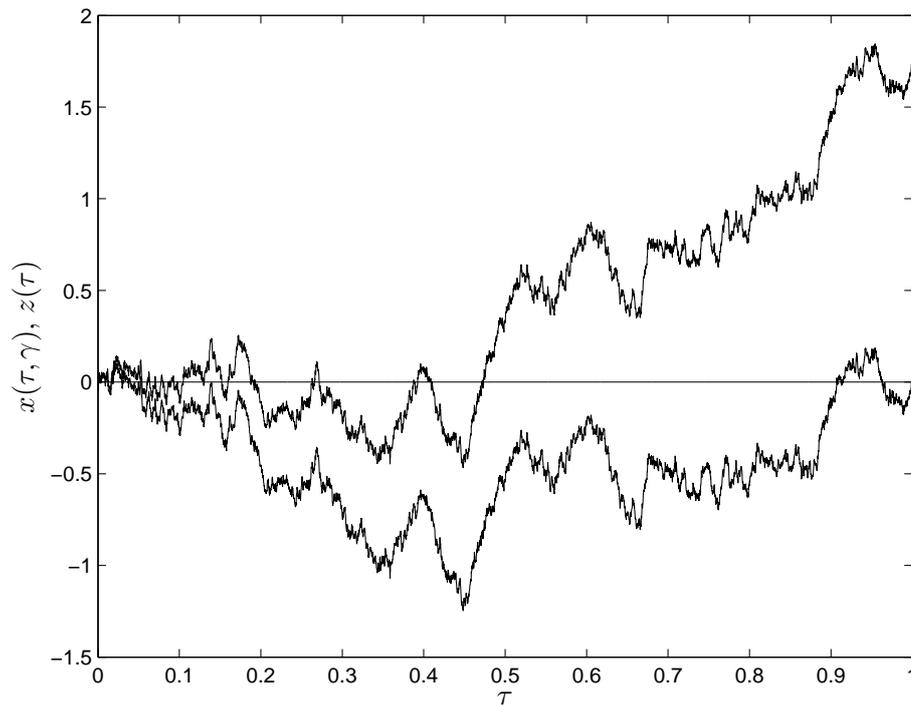


Рис. 1: Реализации канонического броуновского движения  $x(\tau, \gamma)$  (8) при  $\gamma = 1$  и канонического моста  $z(\tau)$  (11). Видно, что максимумы и минимумы реализаций  $x(\tau, \gamma)$  и  $z(\tau)$  сильно различаются.

Сделаем еще одно, немаловажное для понимания дальнейшего, замечание: измерение волатильности, равной  $V(T) = \sigma^2 T$ , сводится, в рамках модели (6), к измерению неизвестной величины  $\sigma^2$ . В реальных условиях, кроме  $\sigma^2$ , неизвестен и дрейф  $\mu$  логарифма цены. Соответственно, неизвестен и канонический дрейф  $\gamma$  в выражении для канонического броуновского движения  $x(\tau, \gamma)$  (8). Тем не менее, чтобы иметь представление о зависимости эффективности оценок волатильности от дрейфа  $\mu$ , мы будем считать канонический дрейф  $\gamma$  произвольно заданным, и уделим особое внимание зависимости математических ожиданий и дисперсий канонических оценок (9) от величины  $\gamma$ .

#### 4 Эффективности оценок Park и моста

Пользуясь данными в приложении к статье формулами для плотностей вероятностей максимумов и минимумов, исследуем статистические свойства канонических оценок Park  $\hat{v}_p(\gamma)$  и моста  $\hat{v}_b$  (9). Далее, где это не вызовет недоразумений, будем называть их кратко — оценки, опуская слово канонические.

Вначале проверим несмещенность Park оценки. Для этого вычислим с помощью плотности вероятностей  $q_x(\delta)$  (39) дисперсию колебания  $d = h - l$  случайного процесса  $x(\tau, \gamma)$  (8) при нулевом дрейфе:

$$\mathbb{V}[d^2] = \mathbb{E}[d^2] = 2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m(4m^2 - 1)} = \ln 16 \quad (\gamma = 0). \quad (12)$$

Отсюда и из формулы (9) для Park оценки  $\hat{v}_p(\gamma)$  заключаем, что она несмещенная при нулевом дрейфе:  $\mathbb{E}[\hat{v}_p(\gamma = 0)] = 1$ . Найдем теперь фактор  $\kappa$  в (9), требуя несмещенность оценки моста  $\hat{v}_b$ . Для этого вычислим дисперсию колебания канонического моста. Согласно (41) она

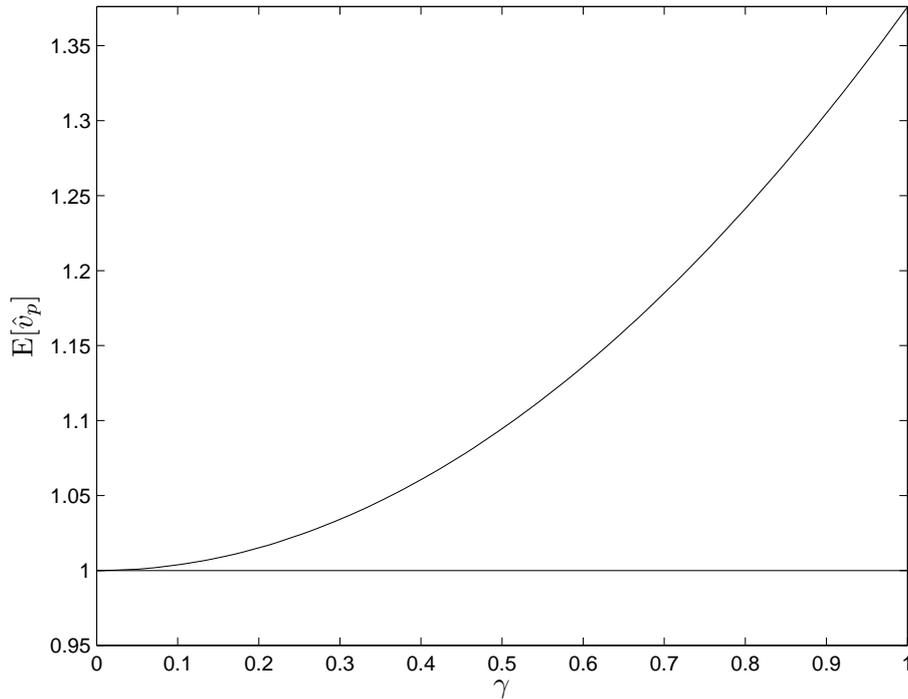


Рис. 2: Зависимость математического ожидания Park оценки  $\hat{v}_p(\gamma)$  от  $\gamma$ . Видно, что при  $\gamma \neq 0$  она становится смещенной. Прямая — математическое ожидание оценки моста  $\hat{v}_b$ , несмещенной при любых  $\gamma$ .

равна

$$\mathbb{V}[s^2] = \mathbb{E}[s^2] = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (\forall \gamma).$$

Соответственно, несмещенная каноническая оценка моста имеет вид

$$\hat{v}_b = \frac{6s^2}{\pi^2}. \quad (13)$$

Здесь  $s := \xi - \zeta$  — колебание канонического моста  $z(\tau)$  (11). Напомним,  $z(\tau)$  не зависит от дрейфа исходного процесса  $x(\tau, \gamma)$ . Это значит, что если оценка моста несмещенная при  $\gamma = 0$ , то она несмещенная и при любом  $\gamma$ . В этом и состоит главная прелесть оценок моста.

Напротив, несмещенность Park оценки при  $\gamma = 0$  сменяется смещенностью при ненулевом дрейфе. Демонстрирующий это график зависимости математического ожидания  $\mathbb{E}[\hat{v}_p(\gamma)]$  от  $\gamma$  дан на Рис. 2.

Вычислим также дисперсии оценок Park и моста, определяющие их эффективность. Подставив в правую часть выражения

$$\mathbb{E}[\hat{v}_p^2(\gamma = 0)] := \frac{1}{\ln^2 16} \int_0^{\infty} \delta^4 q_x(\delta) d\delta$$

сумму (39) для плотности вероятностей  $q_x(\delta)$  и суммируя полученный ряд, найдем средний квадрат Park оценки при  $\gamma = 0$ :

$$\mathbb{E}[\hat{v}_p^2(\gamma = 0)] = \frac{9\zeta(3)}{\ln^2 16} \simeq 1,40733.$$

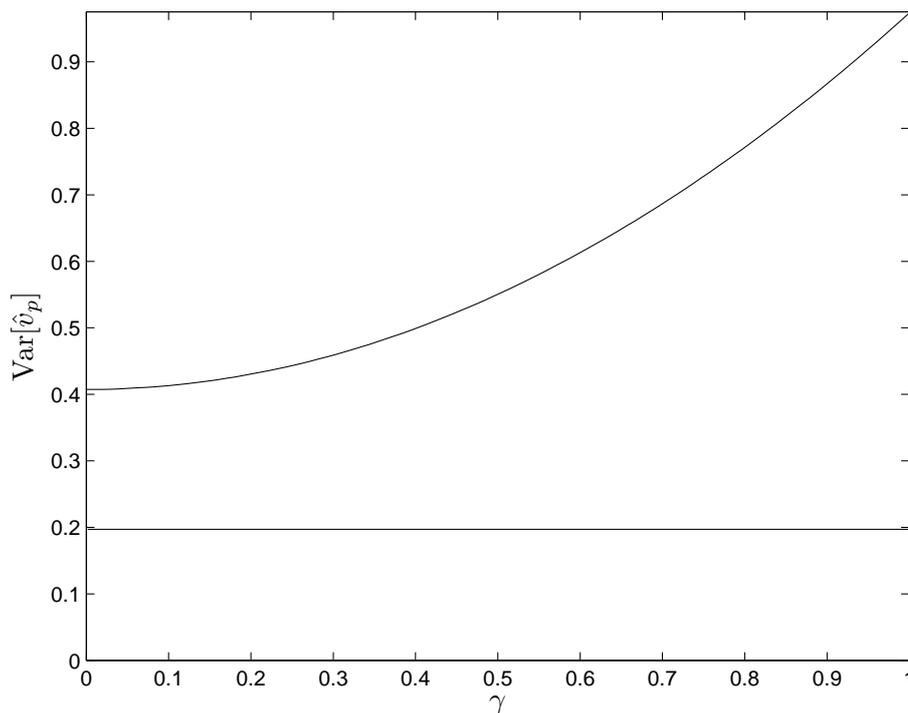


Рис. 3: Зависимость дисперсии Park оценки  $\hat{v}_p(\gamma)$  от  $\gamma$ . Видно, что с ростом  $\gamma$  она все менее эффективна. Прямая — дисперсия оценки моста  $\hat{v}_b$ , демонстрирующая одинаковую эффективность последней при любом дрейфе.

Здесь  $\zeta(x)$  — дзета-функция Римана. Соответственно, дисперсия канонической Park оценки при нулевом дрейфе равна

$$\mathbb{V}[\hat{v}_p(0)] = \frac{9\zeta(3)}{\ln^2 16} - 1 \simeq 0,407. \quad (14)$$

Перейдем к вычислению дисперсии оценки моста  $\hat{v}_b$  (13). Она равна

$$\mathbb{V}[\hat{v}_b] := \frac{36}{\pi^4} \mathbb{E}[s^4] - 1.$$

Подставив сюда вытекающее из равенства (41) выражение

$$\mathbb{E}[s^4] := \int_0^\infty \delta^4 q_b(\delta) d\delta = 3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{30},$$

получим окончательно

$$\mathbb{V}[\hat{v}_b] = \frac{6}{5} - 1 = 0,2. \quad (15)$$

Сравнивая (14) и (15), видим, что дисперсия оценки моста примерно в два раза меньше дисперсии Park оценки. Оценивая эффективность оценки по величине ее дисперсии, отметим что оценка моста примерно в два раза эффективнее Park оценки.

Как и математическое ожидание, дисперсия оценки моста не зависит от  $\gamma$ . Напротив, дисперсия Park оценки существенно зависит от  $\gamma$ . На Рис. 3 дан график этой зависимости, демонстрирующий увеличение дисперсии при ненулевом  $\gamma$  по сравнению со случаем отсутствия дрейфа.

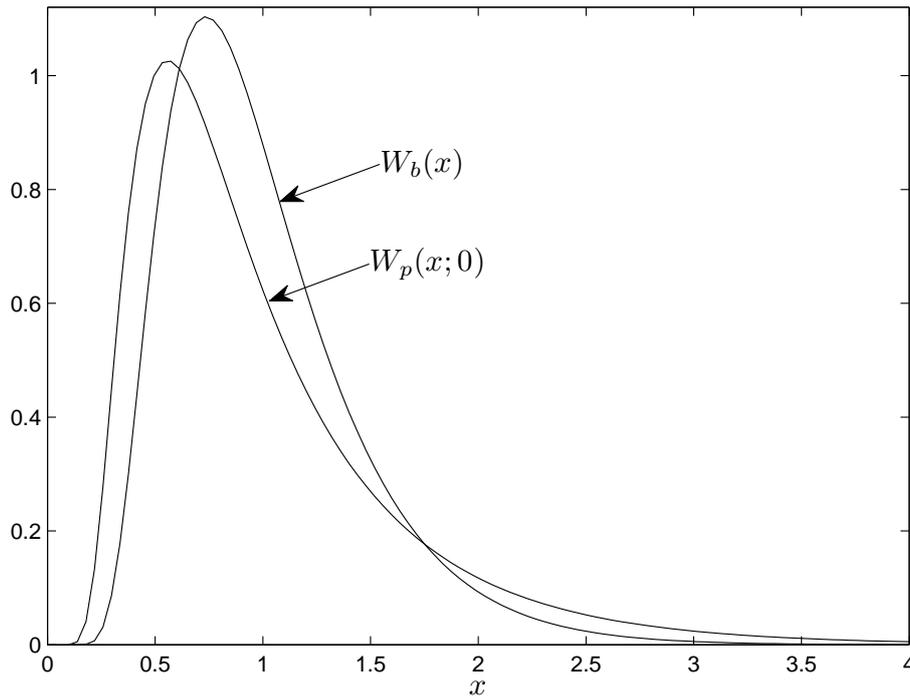


Рис. 4: Графики плотностей вероятностей оценок моста и Park, демонстрирующих «вероятностную предпочтительность» оценки моста по сравнению с Park оценкой.

## 5 Интервальные оценки волатильности

Данные в приложении аналитические формулы для плотностей вероятностей (38) и (39) колебания канонического броуновского движения  $x(\tau, \gamma)$  и плотности вероятностей (41) колебания канонического моста  $z(\tau)$  позволяют исследовать вероятностные свойства оценок Park и моста. Найдем плотности вероятностей этих оценок. Известно, что плотность вероятностей  $W_p(x; \gamma)$  канонической Park оценки выражается через плотность вероятностей  $q_x(\delta; \gamma)$  (38) процесса  $x(\tau, \gamma)$  (8) равенством

$$W_p(x; \gamma) = \sqrt{\frac{p}{4x}} q_x(\sqrt{px}; \gamma), \quad p = \ln 16. \quad (16)$$

Аналогично, плотность вероятностей канонической оценки моста равна

$$W_b(x) = \sqrt{\frac{b}{4x}} q_b(\sqrt{bx}), \quad b = \frac{\pi^2}{6}. \quad (17)$$

Здесь  $q_b(\delta)$  (41) — плотность вероятностей колебания канонического моста. Графики плотностей вероятностей канонических Park оценок при  $\gamma = 0$  и моста при любых  $\gamma$  даны на Рис. 4. На Рис. 5 сравниваются плотности вероятностей оценок Park и моста при  $\gamma = 1$ . Из рисунков видно, что оценки моста теснее «сосредоточены» вокруг своего математического ожидания  $\mathbb{E}[\hat{v}_b] = 1$ , чем Park оценки. Другими словами, и в вероятностном смысле оценка моста эффективнее Park оценки.

Заметим, что введенные выше оценки Park (2), ГК (3) и моста (5) относятся к *точечным оценкам* волатильности. В то же время знание их вероятностных свойств позволяет обсудить эффективность этих оценок как инструмента *интервальных оценок* волатильности. Такие оценки полезны, например, когда важны вероятности превышения волатильностью тех или иных уровней. В качестве иллюстрации интервальных оценок волатильности рассмотрим типичную задачу подобного рода.

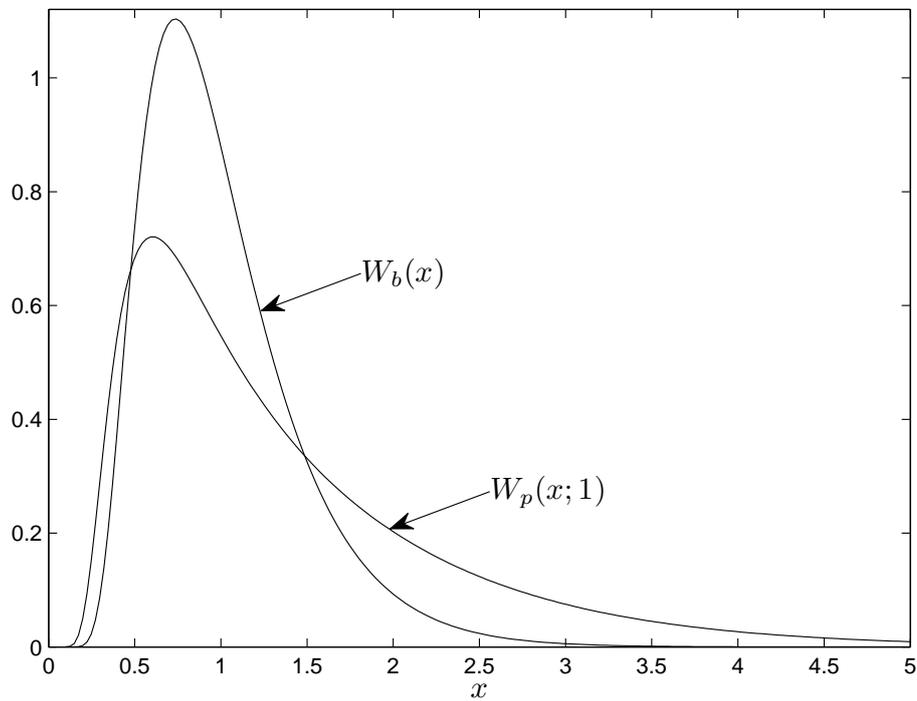


Рис. 5: Плотности вероятностей оценок моста и Park при  $\gamma = 1$ .

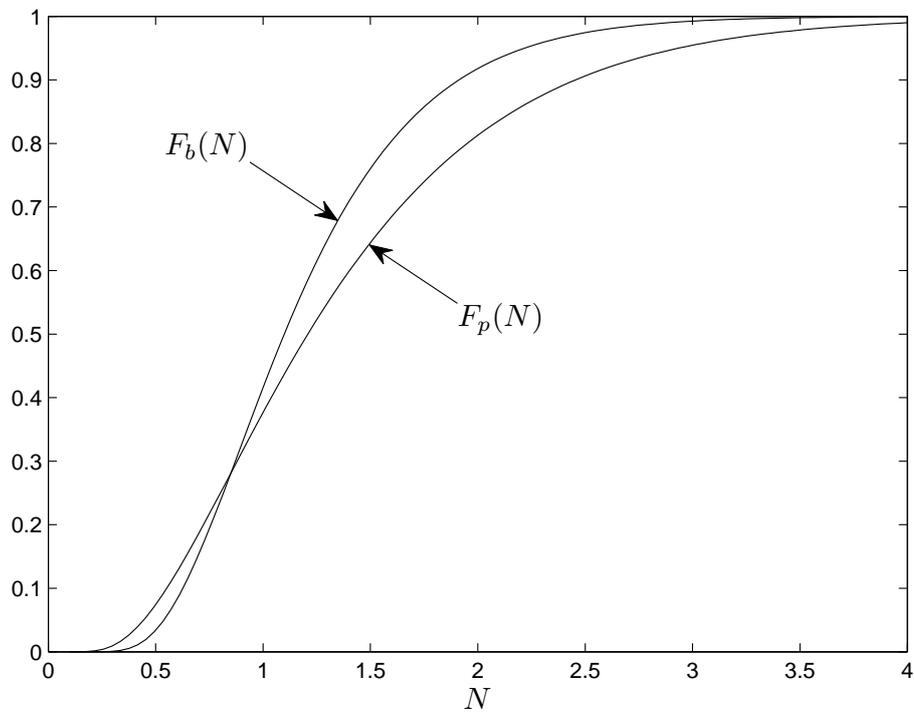


Рис. 6: Графики вероятностей  $F_p(N)$  и  $F_b(N)$  того, что волатильность менее чем в  $N$  раз превышает ее оценки Park и моста.

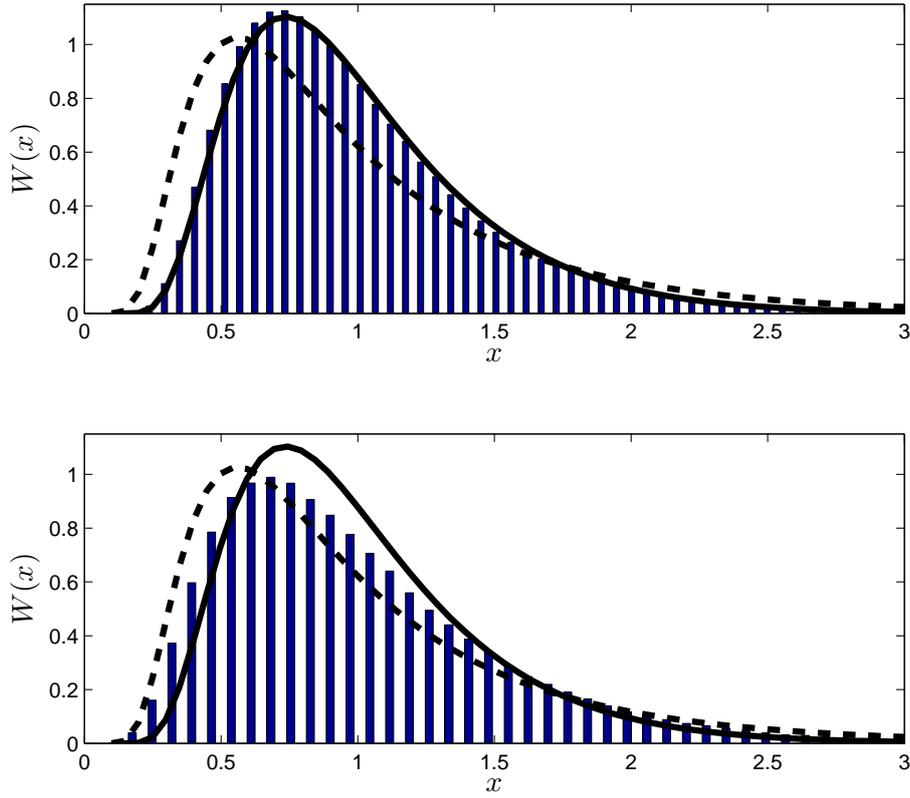


Рис. 7: Верхняя панель: гистограмма оценки моста  $\hat{v}_b$ . Сплошная линия — ее плотность вероятностей, найденная по формулам (17), (41). Штриховая линия — плотность вероятностей Park оценки  $\hat{v}_p$  при  $\gamma = 0$ . Нижняя панель: гистограмма GK оценки  $\hat{v}_g$  при  $\gamma = 0$ . Сплошная и штриховая линии — плотности вероятностей оценок Park и моста при  $\gamma = 0$ .

Пусть  $\hat{V}$  — некая оценка волатильности, равная  $\hat{V} = V(T) \cdot \hat{v}$ , где  $\hat{v}$  — соответствующая каноническая оценка, а  $V(T)$  — измеряемая волатильность. Требуется найти вероятность

$$F(N) := \mathbb{P} \left\{ V(T) < N \cdot \hat{V} \right\}$$

того что неизвестная волатильность  $V(T)$  не более чем в  $N$  раз превышает известную (из измерений) оценку волатильности  $\hat{V}$ . Очевидна эквивалентность неравенств

$$V(T) < N \cdot \hat{V} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{v} > 1/N.$$

Последнее означает, что искомая вероятность  $F(N)$  следующим образом выражается через вероятностные свойства канонической оценки  $\hat{v}$ :

$$F(N) = \mathbb{P} \left\{ \hat{v} > 1/N \right\} = \int_{1/N}^{\infty} W(x) dx, \quad (18)$$

где  $W(x)$  — плотность вероятностей канонической оценки  $\hat{v}$ .

Вычисления с помощью формул (16)–(18) и данных в приложении плотностей вероятностей показывают, что вероятность истинному значению волатильности быть меньше ее удвоенной оценки  $\hat{V}_b$  равна  $F_b(2) \simeq 0,918$ . Это значительно выше аналогичной вероятности для Park оценки:  $F_p(2, \gamma = 0) \simeq 0,813$ . Графики зависимости вероятности  $F(N)$  (18) от  $N$  для Park оценки (в отсутствии дрейфа  $\mu = 0$ ) и оценки моста даны на Рис. 6.

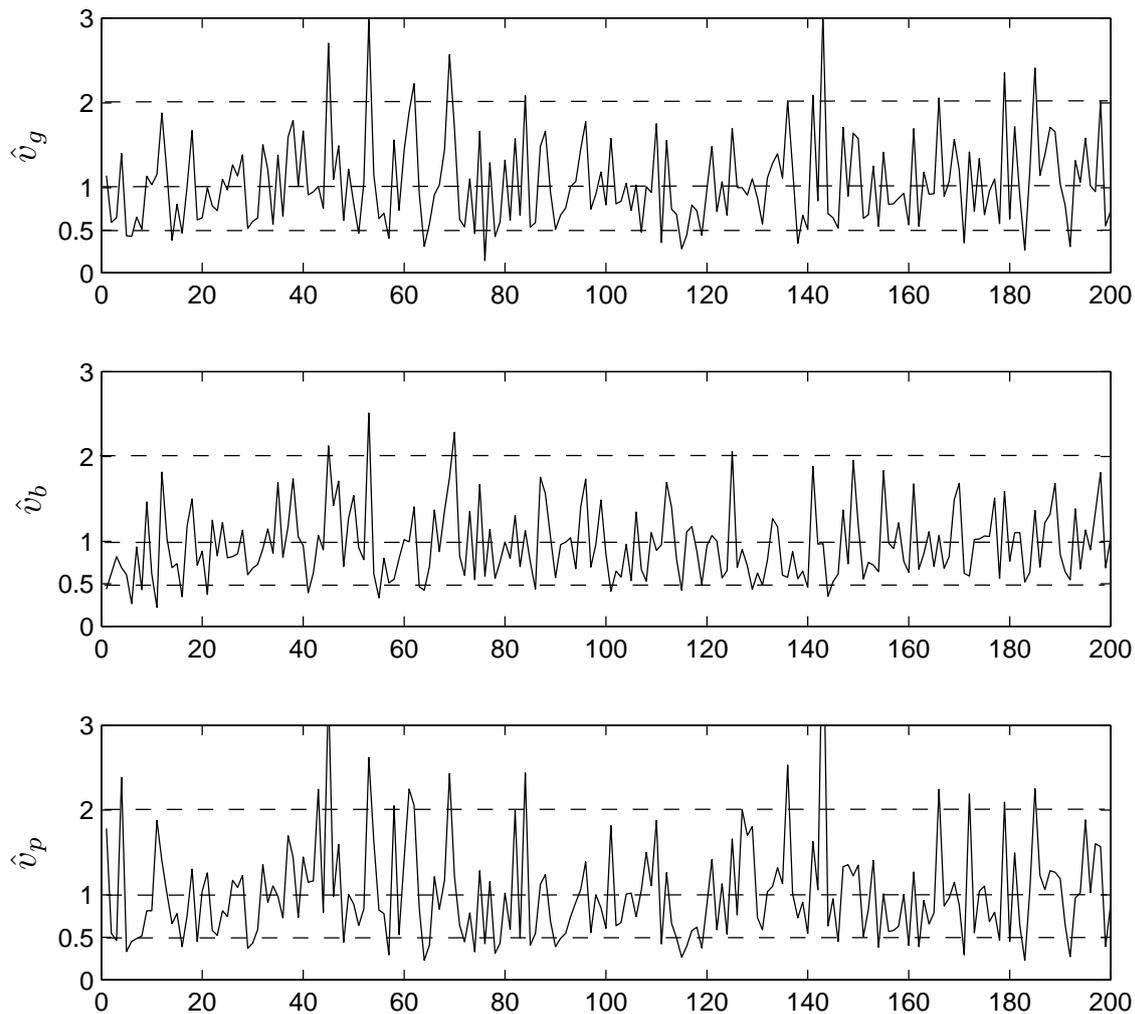


Рис. 8: Графики двухсот значений оценок GK, моста и Park для одних и тех же реализаций вектора  $\mathbf{X}(\gamma)$  (19). Даже невооруженным глазом видно, что оценка моста лучше GK и Park оценивает волатильность.

## 6 Сравнение оценок GK, Park и моста

Выше мы обсудили свойства оценок Park и моста. На практике более популярна GK оценка (3), поскольку при нулевом дрейфе она эффективнее Park оценки. В самом деле, из выполненных в работе Garman & Klass (1980) расчетов видно, что дисперсия GK оценки  $\mathbb{V}[\hat{v}_g] \simeq 0,269$  меньше дисперсии Park оценки  $\mathbb{V}[\hat{v}_p] \simeq 0,407$ . С другой стороны, дисперсия GK оценки больше дисперсии оценки моста  $\mathbb{V}[\hat{v}_b] = 0,2$ . Ниже дан сравнительный анализ статистических свойств оценок GK, Park и моста.

Забегая вперед, отметим, что подобно Park оценке, GK оценка тем более смещена, чем больше  $|\gamma|$ . Дисперсия GK оценки также растет с ростом  $|\gamma|$ . Напротив, при любых  $\gamma$  оценка моста несмещенная, а дисперсия неизменная. Это делает оценку моста предпочтительнее GK оценки.

Выше, при анализе оценок Park и моста, мы опирались на формулы для плотностей вероятностей экстремумов. Аналогично можно привлечь к обсуждению свойств GK оценки формулы (35), (36) для плотности вероятностей  $q_x(\eta, \ell, \chi; \gamma)$  случайных величин  $(h, l, c)$  (10). Ниже мы поступим иначе: изучим свойства GK оценки методом статистических испытаний.

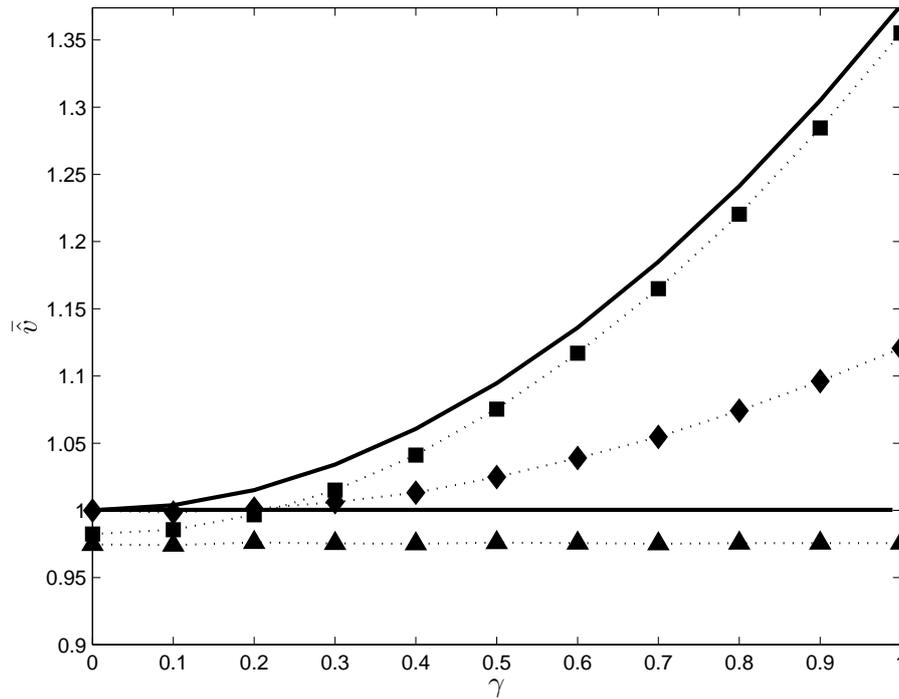


Рис. 9: Статистические средние  $\bar{v}$  оценок Park (■), GK (◆) и моста (▲).

С этой целью смоделируем  $M \gg 1$   $N + 1$ -мерных векторов:

$$\mathbf{X}(\gamma) := \{0, x_1(\gamma), \dots, x_N(\gamma)\}, \quad x_n(\gamma) := \gamma \frac{n}{N} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \epsilon_n, \quad (19)$$

где  $\{\epsilon_n\}$  — независимые гауссовы величины  $\sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Вектор  $\mathbf{X}(\gamma)$  адекватно аппроксимирует, при  $N \gg 1$ , процесс  $x(\tau, \gamma)$  (8). По  $M$  векторам  $\mathbf{X}(\gamma)$  находим  $M$  значений канонических оценок. Дальнейшая статистическая обработка позволяет изучить их свойства. Ниже число  $N$  дискретизации интервала  $\tau \in (0, 1)$  и объем  $M$  выборок берутся равными  $N = 5 \times 10^3$ ,  $M = 5 \times 10^5$ . Рисунок 7 наглядно иллюстрирует преимущество оценки моста перед GK оценкой. На Рис. 8 даны 200 значений оценок GK, Park и моста, позволяющие убедиться в эффективности оценок моста.

На Рис. 9 даны графики найденных численно статистических средних оценок GK, Park и моста, демонстрирующие смещенность, при  $\gamma \neq 0$ , первых двух оценок, и несмещенность последней. На Рис. 10 даны графики зависимости от  $\gamma$  дисперсий указанных оценок. Видно, что при любом  $\gamma$  оценка моста эффективнее прочих оценок.

На Рис. 11 даны результаты аналитических расчетов и статистического оценивания вероятности, что значение волатильности  $V(T)$  больше половины оценки волатильности  $\hat{V}$ , и меньше его удвоенного значения:

$$P_{\Delta} := \mathbb{P} \left\{ \frac{\hat{V}}{2} < V(T) < 2\hat{V} \right\} = \int_{1/2}^2 W(x) dx. \quad (20)$$

Видно, что при любых  $\gamma$  эта вероятность для оценки моста значительно выше вероятностей для GK и Park оценок.

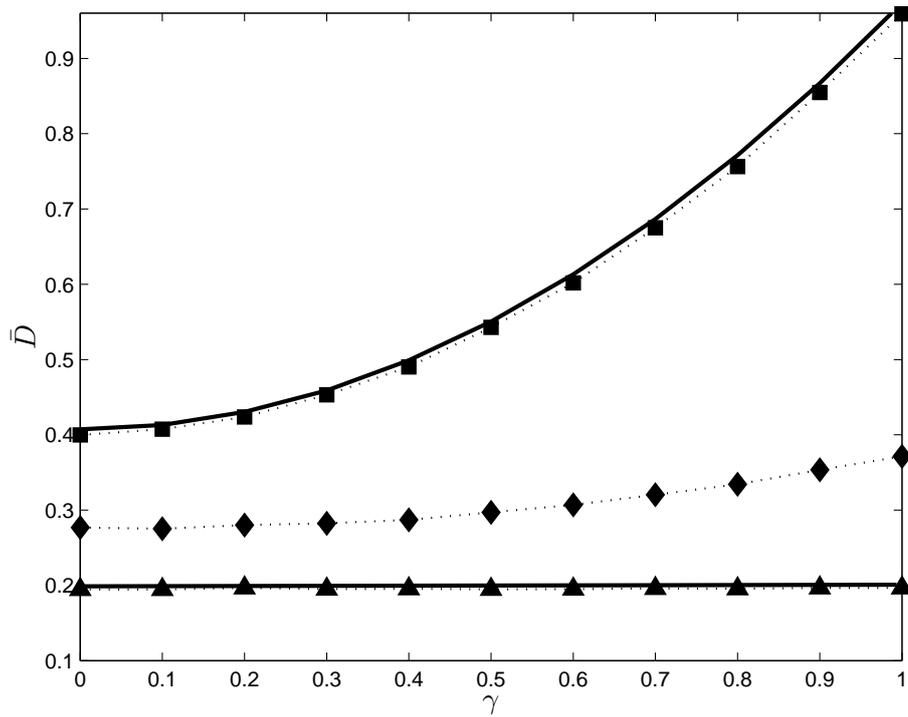


Рис. 10: Оценки дисперсии  $\bar{D}$  оценок Park (■), GK (◆) и моста (▲). Линии — математические ожидания оценок Park и моста. Видно что дисперсия оценки моста существенно меньше дисперсии GK оценки.

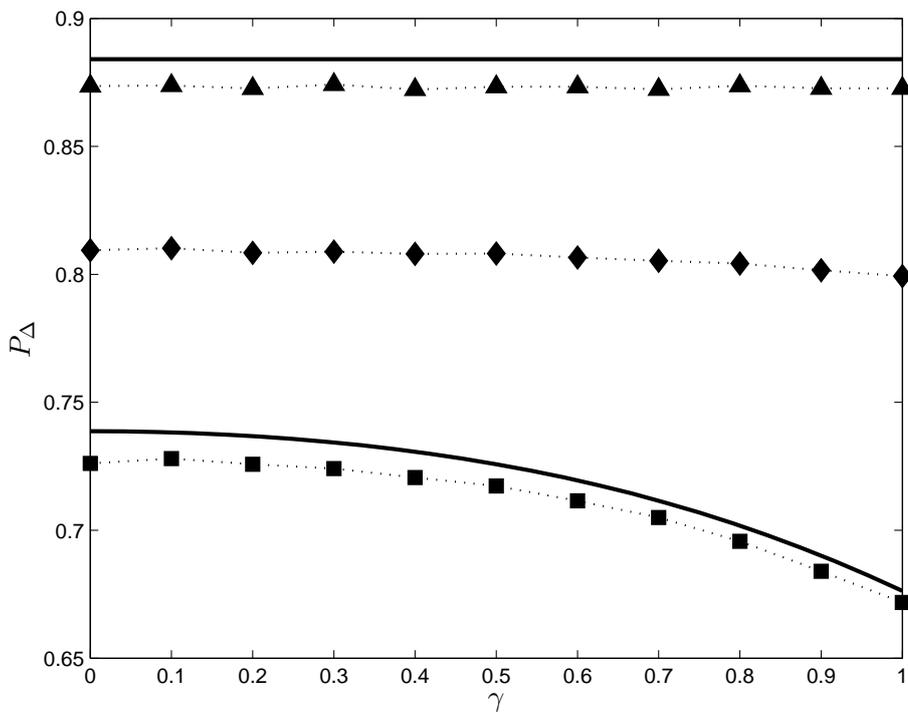


Рис. 11: Статистические оценки зависимости вероятности  $P_\Delta$  (20) от  $\gamma$  для оценок Park (■), GK (◆) и моста (▲). Линии — результаты теоретических расчетов по формуле (20).

## 7 Оценки интегрированной волатильности

Отметим, что изученные выше оценки волатильности можно использовать для оценок *интегрированной волатильности*. Поясним сказанное, заменив ГБД модель поведения цены финансового инструмента на одну из разновидностей модели стохастической волатильности. Будем считать, что логарифм цены  $X(t)$  подчиняется стохастическому уравнению Ито

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t). \quad (21)$$

Здесь  $\mu(t)$  и  $\sigma(t)$  — некоторые случайные процессы<sup>2</sup>, влияющие на поведение логарифма цены  $X(t)$ . В рамках модели (21), интегрированной волатильностью на интервале  $t \in (0, T)$  называют интеграл

$$D(T) := \int_0^T \sigma^2(t)dt. \quad (22)$$

Наиболее распространенной оценкой интегрированной волатильности служит *реализованная волатильность* (назовем ее кратко РВ оценкой):

$$[X, X]_T := \sum_{i=1}^n \hat{D}_{\text{real}}\{X(t) : t \in \mathbb{S}_i\}, \quad \Delta = \frac{T}{n}. \quad (23)$$

Здесь

$$\hat{D}_{\text{real}}\{X(t) : t \in \mathbb{S}_i\} := (X_i - X_{i-1})^2, \quad X_i := X(t_i), \quad t_i := i\Delta, \quad (24)$$

оценивает текущую волатильность<sup>3</sup>, а

$$\mathbb{S}_i : (t_{i-1}, t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (25)$$

— «микро»-интервалы времени длительностью  $\Delta$ , на которые разбивают «макро»-интервал  $t \in (0, T)$ .

Как известно, в рамках модели (21) РВ оценка (23) сходится по вероятности, при  $n \rightarrow \infty$ , к интегрированной волатильности (22). В реальных условиях, однако, число  $n$  ограничено дискретностью процесса купли-продажи финансового инструмента, а также микроструктурным шумом<sup>4</sup>, которые не учитывает модель (21).

Оценим ограничение на число  $n$  из-за дискретности купли-продажи. Пусть  $\nu$  — характерная частота сделок. Чтобы непрерывный процесс  $X(t)$ , удовлетворяющий стохастическому уравнению Ито (21), адекватно описывал дискретный процесс купли-продажи, необходимо чтобы внутри «микро» интервалов  $\mathbb{S}_i$  (25) было много сделок. Иными словами, должны выполняться неравенства:

$$\nu \cdot \Delta \gg 1 \quad \Rightarrow \quad n \ll \nu \cdot T. \quad (26)$$

По-видимому, микроструктурный шум накладывает еще более жесткие ограничения, при заданных  $\nu$  и  $T$ , на число  $n$  слагаемых в оценке (23).

Из-за ограниченности числа  $n$  «микро» интервалов, на которые разбивается «макро» интервал  $t \in (0, T)$ , оценка интегрированной волатильности с помощью РВ оценки обладает неустранимой ошибкой.

<sup>2</sup>Мы будем полагать их непрерывными функциями времени.

<sup>3</sup>Мы называем так интегрированную волатильность в «микро»-интервале  $t \in \mathbb{S}_i$ . В англоязычной литературе ее называют *spot volatility*.

<sup>4</sup>Некоторое представление о микроструктурном шуме можно получить из работы Saichev & Sornette (2012).

Имеется, тем не менее, прием, способный, при том же  $n$ , значительно уменьшить ошибку оценки интегрированной волатильности по сравнению с РВ оценкой. Он состоит в замене суммы (23) в РВ оценке другой суммой:

$$\hat{D}_{\text{est}}(T) = \sum_{i=1}^n \hat{D}_{\text{est}}\{X(t) : t \in \mathbb{S}_i\}, \quad (27)$$

где оценка текущей волатильности  $\hat{D}_{\text{est}}\{X(t) : t \in \mathbb{S}_i\}$  эффективнее оценки (24), фигурирующей в РВ оценке (23). Индекс *est* в (27) указывает на конкретную оценку. К примеру, *real* означает РВ оценку.

Будем считать, что оценка интегрированной волатильности (27) *высокочастотная* в том смысле, что длительность  $\Delta$  временных интервалов  $\mathbb{S}_i$  (25), удовлетворяя первому неравенству (26), тем не менее мала в сравнении с характерными масштабами процессов  $\mu(t)$  и  $\sigma(t)$  из уравнения (21). Тогда можно, практически не делая ошибки, заменить исходное уравнение (21) набором уравнений броуновского движения:

$$dX^i(t) \simeq \mu_i dt + \sigma_i dW^i(t), \quad X^i(t_{i-1}) = X_{i-1}, \quad t \in \mathbb{S}_i, \quad (28)$$

где  $\mu_i = \mu(i\Delta) = \text{const}$ ,  $\sigma_i = \sigma(i\Delta) = \text{const}$ ,  $i = 1 \div n$ , и применять при анализе каждой из текущих волатильностей ГБД модель (6).

Ниже мы сформулируем критерий эффективности высокочастотных оценок интегрированной волатильности. Для начала назовем оценку  $\hat{D}_{\text{est}}(T)$  (27) интегрированной волатильности несмещенной, если выполнены равенства

$$\mathbb{E} \left[ \hat{D}_{\text{est}}\{X(t) : t \in \mathbb{S}_i\} \right] = \Delta \cdot \sigma_i^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E} \left[ \hat{D}_{\text{est}}(T) \right] = \Delta \sum_{i=1}^n \sigma_i^2.$$

Нетрудно показать с учетом уравнений (28), что в случае РВ оценки (23), (24), ее математическое ожидание равно:

$$\mathbb{E} [[X, X]_T] = \Delta \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 (1 + \gamma_i^2), \quad \gamma_i = \frac{\mu_i}{\sigma_i} \sqrt{\Delta}. \quad (29)$$

Отсюда видно, что РВ оценка несмещена лишь при полном отсутствии дрейфа ( $\mu(t) \equiv 0$ ) на всем интервале  $t \in (0, T)$ , где измеряется интегрированная волатильность.

Допустим, некоторая оценка  $\hat{D}_{\text{est}}(T)$  интегрированной волатильности (27) несмещена. В таком случае будем характеризовать эффективность оценки ее минимальной относительной дисперсией<sup>5</sup>:

$$\rho_{\text{est}}(n) := \min_{\forall \mu(t), \sigma(t)} \mathcal{R}[\hat{D}_{\text{est}}(T)], \quad \mathcal{R}[\hat{D}_{\text{est}}(T)] := \frac{\mathbb{V}[\hat{D}_{\text{est}}(T)]}{(\mathbb{E}[\hat{D}_{\text{est}}(T)])^2}.$$

К примеру, для РВ оценки в отсутствие дрейфа ( $\mu(t) \equiv 0$ ), когда РВ оценка несмещена, имеем:

$$\mathcal{R} [[X, X]_T] = 2 \cdot f(\mathbf{s}), \quad f(\mathbf{s}) := \sum_{i=1}^n s_i^2 / \left( \sum_{i=1}^n s_i \right)^2, \quad (30)$$

где

$$\mathbf{s} := \{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2\}.$$

<sup>5</sup>Назовем ее для краткости минимальной дисперсией.

Нетрудно показать, опираясь на неравенство Йенсена (см., например, Rudin 1968), что введенная выше функция  $f(\mathbf{s})$  удовлетворяет неравенству  $f(\mathbf{s}) \geq 1/n$ . А значит минимальная дисперсия РВ оценки равна:

$$\rho_{\text{real}}(n) = 2/n \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}[[X, X]_T] \geq \rho_{\text{real}}(n), \quad \forall \sigma(t), \quad \mu(t) \equiv 0. \quad (31)$$

Аналогично можно показать (Saichev & Sornette 2011), что минимальная дисперсия любой несмещенной оценки  $\hat{D}_{\text{est}}(T)$  интегрированной волатильности такова:

$$\rho_{\text{est}}(n) = \mathbb{V}[\hat{v}_{\text{est}}]/n, \quad (32)$$

где  $\mathbb{V}[\hat{v}_{\text{est}}]$  — дисперсия соответствующей канонической оценки  $\hat{v}_{\text{est}}$  текущей волатильности.

Сравним эффективности разных оценок интегрированной волатильности с эффективностью РВ оценки. Для этого будем характеризовать эффективность той или иной оценки отношением

$$\mathcal{D}_{\text{est}} = \rho_{\text{real}}(n)/\rho_{\text{est}}(n).$$

Чем больше это отношение, тем эффективней оценка **est** по сравнению с РВ оценкой. Принимая во внимание равенства (31) и (32), получим окончательно:

$$\mathcal{D}_{\text{est}} = 2/\mathbb{V}[\hat{v}_{\text{est}}].$$

Подставив сюда указанные в предыдущих разделах эффективности канонических оценок текущей волатильности в рамках ГБД модели, получим сравнительные эффективности оценок (27) интегрированной волатильности, опирающихся на Park, GK и моста оценки:

$$\mathcal{D}_{\text{p}} \simeq \frac{2}{0,407} \simeq 4,91, \quad \mathcal{D}_{\text{g}} \simeq \frac{2}{0,269} \simeq 7,45, \quad \mathcal{D}_{\text{b}} = \frac{2}{0,2} = 10.$$

Отсюда видно, что оценки интегрированной волатильности  $\hat{D}_{\text{est}}(T)$  (27), использующие в качестве оценок текущей волатильности Park и GK оценки, а тем более оценку моста, много эффективнее реализованной волатильности (23).

## Благодарности

Авторы благодарны профессору Российской экономической школы Станиславу Анатольеву и анонимному рецензенту за ценные замечания, способствовавшие улучшению изложения результатов статьи.

## Список литературы

- Borodin, A.N. & P. Salminen (2002). *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae*, второе издание. Birkhäuser Verlag: Basel.
- Cont, R. & P. Tankov (2004). *Financial Modelling With Jump Processes*. CRC Press: London.
- Garman, M. & M.J. Klass (1980). On the estimation of security price volatilities from historical data. *Journal of Business* 53, 67–78.
- Jeanblanc, M., M. Yor & M. Chesney (2009). *Mathematical Methods for Financial Markets*. Springer Verlag: London.
- Kunitomo, N. (1992). Improving the Parkinson method of estimating security price volatilities, *Journal of Business* 65, 295–302.
- Martens, M. & D. van Dijk (2007). Measuring volatility with the realized range. *Journal of Econometrics* 138, 181–207.

- Parkinson, M. (1980). The extreme value method for estimating the variance of the rate of return. *Journal of Business* 53, 61–65.
- Rudin, W. (1986). *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill: New York.
- Saichev A., Y. Malevergne & D. Sornette (2010). *Theory of Zipf's Law and Beyond*. Springer Verlag: Heidelberg.
- Saichev, A. & D. Sornette (2011). Time-bridge estimators of integrated variance. Доступно на arXiv:1108.2611v1 [q-fin.ST] 12 Aug 2011.
- Saichev, A. & D. Sornette (2012). A simple microstructure return model explaining microstructure noise and Epps effects. *Swiss Finance Institute Research Paper Series No 12-08*. Доступно на <http://ssrn.com/abstract=2009392>.
- Slepaczuk, R. & G. Zakrzewski (2009). High-frequency and model-free volatility estimators. *University of Warsaw Working Paper No 13/2009*.
- Zhang, L., P.A. Mykland & Y. Ait-Sahalia (2005). A tale of two time scales: determining integrated volatility with noisy high-frequency data. *Journal of American Statistical Association* 100, 1394–1411.

## Приложения: Вероятностные свойства экстремумов

Ниже даны плотности вероятностей случайных величин  $(h, l, c)$  (10) и  $(\xi, \zeta)$  (11), полезные при анализе канонических оценок (9). Начнем со случайной величины  $c = x(1, \gamma)$ . Ее плотность вероятностей гауссова:

$$f(\chi; \gamma) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\chi - \gamma)^2}{2}\right), \quad \chi \in (-\infty, \infty).$$

Легко показать также, что совместная плотность вероятностей  $q_x(\eta, \chi; \gamma)$  максимума  $h$  (10) и случайной величины  $c = x(1, \gamma)$  равна

$$q_x(\eta, \chi; \gamma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (2\eta - \chi) e^{2\gamma\eta} \exp\left(-\frac{1}{2}(2\eta - x + \gamma)^2\right), \quad (33)$$

где  $\chi < \eta$ ,  $\eta > 0$ . В свою очередь, плотность вероятностей максимума  $h$  (10)

$$q_x(\eta; \gamma) := \int_{-\infty}^{\eta} q_x(\eta, \chi; \gamma) d\chi$$

задана выражением

$$q_x(\eta; \gamma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{(\eta - \gamma)^2}{2}\right) - \gamma e^{2\gamma\eta} \operatorname{erfc}\left(\frac{\eta + \gamma}{2}\right), \quad (34)$$

где  $\eta > 0$ . Аналогичные вероятностные распределения для минимума  $l$  (10) можно найти из выражений (33) и (34) заменой  $(\eta, \gamma)$  на  $(-\ell, -\gamma)$ .

Дадим еще явное выражение для плотности вероятностей  $q_x(\eta, \ell, \chi; \gamma)$  случайных величин  $(h, l, c)$  (10). Пользуясь формулами из монографии Borodin & Salminen (2002) и работы Saichev & Sornette (2011), можно показать, что искомая плотность вероятностей равна:

$$q_x(\eta, \ell, \chi; \gamma) = f(\chi; \gamma) \mathcal{S}(\eta, \ell | \chi), \quad (35)$$

где  $\chi \in (\ell, \eta)$ ,  $h > \chi \mathbf{1}(\chi)$ ,  $\ell < \chi \mathbf{1}(-\chi)$ . Здесь  $\mathbf{1}(\chi)$  – единичная функция. Кроме того, здесь фигурирует функция

$$\mathcal{S}(\eta, \ell | \chi) := \sum_{m=-\infty}^{\infty} m [m\mathcal{F}(m(\eta - \ell), \chi) + (1 - m)\mathcal{F}(m(\eta - \ell) + \ell, \chi)], \quad (36)$$

где

$$\mathcal{F}(\eta, \chi) := [(\chi - 2\eta)^2 - 1] e^{2\eta(\chi - \eta)}.$$

Отметим, что совместная плотность вероятностей (35) и (35) позволяет вычислить, аналитически или численно, статистические характеристики канонических оценок Park  $\hat{v}_p(\gamma)$  и GK  $\hat{v}_g(\gamma)$  (9).

При вычислении статистических свойств GK оценок иногда оказывается полезной совместная плотность вероятностей  $q_x(\delta, \chi; \gamma)$  колебания  $d = h - l$  канонического броуновского движения  $x(\tau, \gamma)$  (8) и случайной величины  $c = x(1, \gamma)$ . Как следует из (35), (36), она равна

$$q_x(\delta, \chi; \gamma) = 4f(\chi; \gamma) \sum_{m=-\infty}^{\infty} m e^{-2m\delta(|\chi| + m\delta)} \times [m(\delta - \chi)[(|\chi| + 2m\delta)^2 - 1] - (m + 1)(|\chi| + 2m\delta)], \quad (37)$$

где  $\delta > |\chi|$ ,  $\chi \in (-\delta, \delta)$ . Интегрируя эту плотность вероятностей по всем возможным значениям аргумента  $\chi$ , найдем плотность вероятностей колебания  $d$ :

$$q_x(\delta; \gamma) = 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} m \left( \sqrt{\frac{8}{\pi}} e^{-\frac{\gamma^2}{2} - 2m^2\delta^2} \times \left[ e^{-\frac{\delta^2}{2}(1+4m)} \cosh(\delta\gamma)(1 + m(2 + \gamma^2)) - m(2 + \gamma^2) \right] + \gamma [a(\delta, \gamma, m) + a(-\delta, \gamma, m)] \right), \quad (38)$$

где  $\delta > 0$ . Здесь использована вспомогательная функция

$$a(\delta, \gamma, m) := e^{2m\delta\gamma} [1 + m(3 + \gamma(2m\delta + \gamma + \delta))] \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{2m\delta + \gamma + \delta}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{2m\delta + \gamma}{\sqrt{2}}\right) \right].$$

В частном случае нулевого дрейфа  $\gamma = 0$  из (38) находим выражение

$$q_x(\delta) = \sqrt{\frac{32}{\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m \left[ (1 + 2m)e^{-\frac{(1+2m)^2\delta^2}{2}} - 2me^{-2m^2\delta^2} \right] \quad (39)$$

для плотности вероятностей колебания случайного процесса  $x(\tau, \gamma)$ .

Все статистические свойства экстремумов канонического моста (11) определяются их двумерной плотностью вероятностей:

$$q_b(\eta, \ell) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} m [m\mathcal{F}(m(\eta - \ell)) + (1 - m)\mathcal{F}(m(\eta - \ell) + \ell)], \quad (40)$$

где

$$\mathcal{F}(\eta) := 4(4\eta^2 - 1)e^{-2\eta^2}.$$

Вытекающая отсюда плотность вероятностей  $q_b(\delta)$  колебания  $s = \xi - \zeta$  канонического моста задана выражением

$$q_b(\delta) = 8\delta \sum_{m=1}^{\infty} m^2(4m^2\delta^2 - 3)e^{-2m^2\delta^2}, \quad \delta > 0. \quad (41)$$

# Volatility estimation based on extremes of the bridge

**Svetlana Lapinova**

*Nizhni Novgorod branch of Higher School of Economics, Russia*

**Alexander Saichev**

*Nizhni Novgorod State University, Russia*

*Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, Switzerland*

**Maria Tarakanova**

*Nizhni Novgorod State University, Russia*

We investigate properties of the volatility estimator, which is proportional to the square of oscillations of the bridge formed by the logarithm of the incremental price of a financial instrument at a specified time interval. In the framework of the geometric Brownian motion model for price increments we show by analytical computations and statistical simulations that the proposed volatility estimator by the bridge is much more efficient than the well-known Parkinson and Garman–Class estimators. We also discuss possible usages of the estimators for estimation of integrated volatility.

*Keywords: volatility, volatility estimators, efficiency, bias, extremes of Brownian motion*

*JEL Classification: C11, C14, C15*