

# Статьи: финансовая эконометрика

## Непостоянные во времени вьющиеся копулы в многомерном анализе доходностей\*

Олег Грошев<sup>†</sup>

*Barclays Capital, Москва, Россия*

В данной работе анализируется многомерное распределение финансовых доходностей с помощью непостоянных во времени вьющихся копул. В ней представлена оценка  $d$ -шагового метода максимального правдоподобия (dSML), и показано, что эта оценка является не только состоятельной и асимптотически нормальной, но еще и более вычислительно привлекательной, чем оценка метода максимального правдоподобия или оценка Паттона. Используя оценку dSML, мы подгоняем вьющиеся копулы под доходности валют развивающихся стран, производим диагностику и выбор модели.

*Ключевые слова: многомерные временные ряды, вьющиеся копулы,  $d$ -шаговый метод максимального правдоподобия, вычислительная эффективность*

*Классификация JEL: C13, C58, G15*

### 1 Введение

Моделирование многомерных данных при помощи копул ни в коей мере не является новым. Начиная с оригинальной работы Sklar (1959), копулы находят все большее применение в статистике, эконометрике и финансах. Основная идея использования копул заключается в декомпозиции многомерной функции распределения на две компоненты. Первая соответствует маргинальным функциям распределения данного многомерного распределения. Вторая компонента называется функцией-копулой и отражает зависимость компонент многомерных данных. Таким образом, многомерная плотность можно оценить раздельно — сначала маргинальные плотности, потом копулу. Процесс оценивания особенно прост для случайной выборки (независимых и одинаково распределенных наблюдений).

В контексте временных рядов моделирование с помощью копул сложнее и является более недавним открытием. Паттон в своей диссертации (Patton, 2002) доказал аналог теоремы Склара для условных распределений. Эта теорема позволяет разложить логарифм функции правдоподобия на сумму логарифмов маргинальных функций правдоподобия и лог-плотности копулы. Разложение абсолютно аналогично случаю независимых и одинаково распределенных величин. Паттон предложил двухшаговый метод максимального правдоподобия (2SML) для оценки параметров многомерного распределения. Сначала, используя стандартный метод МП, требуется оценить параметры маргинальных распределений. Затем следует подставить полученные оценки параметров в логарифм функции правдоподобия копулы и, используя МП еще раз, найти параметры копулы. Паттон показал, что 2SML дает состоятельные оценки параметров; кроме того, он вывел формулу для асимптотической ковариационной матрицы. Замечателен подход Паттона тем, что он позволяет зависимости между временными рядами меняться со временем. Несколько спецификаций для условной зависимости были предложены в Jondeau & Rockinger (2006), а также в Patton (2006).

---

\*Цитировать как: Грошев, Олег (2014). «Непостоянные во времени вьющиеся копулы в многомерном анализе доходностей», Квантиль, №12, стр. 53–67. Citation: Groshev, Oleg (2014). “Time varying vine copulas for multivariate returns,” *Quantile*, No.12, pp. 53–67.

<sup>†</sup>Адрес: 123056, г. Москва, Большая Грузинская ул., 71. Электронная почта: [oleg.groshev@gmail.com](mailto:oleg.groshev@gmail.com)

Несмотря на простоту идеи, теорию копул сложнее применять для многомерных данных в случае размерности большей двух. Существует множество двумерных копул; их обзор приведен в Trivedi & Zimmer (2005). В то же время моделирование в больших размерностях до недавних пор было ограничено эллиптическими копулами (например, Гауссовой или копулой Стьюдента). Хотя такие модели превосходят на финансовых данных модели, основанные на многомерном нормальном или Стьюдентовом распределении, они все равно являются «слишком линейными» в том смысле, что не могут уловить асимметричную зависимость в хвостах. Хорошее введение в эти вопросы содержится в Patton (2004).

Joe (1996) и Bedford & Cooke (2002) предложили использовать вьющиеся копулы для моделирования многомерных данных. Этот подход требует оценки  $d(d-1)/2$  двумерных копул; многомерная копула затем конструируется из этих двумерных. Данный подход обладает большой свободой в том, как моделируется зависимость между компонентами многомерных данных. Недавно Aas, Czado, Frigressi & Bakken (2009) оценили несколько вьющихся копул с постоянными параметрами зависимости. Они использовали стандартный метод ML, который потребовал значительных вычислительных мощностей. В их статье была предложена итеративная процедура для нахождения хорошего начального значения для решения оптимизационной задачи ML. Оказалось возможным довести эту процедуру (по аналогии с методом 2SML Паттона) до dSML оценки. В данном случае  $d$  соответствует количеству шагов (равному размерности многомерных данных).

Основной вклад данного исследования – это строгое построение dSML оценки и доказательство ее состоятельности и асимптотической нормальности. Преимущество dSML составляет снижение размерности задачи и вычислительных издержек. Поскольку вьющиеся копулы имеют разложение по попарным копулам, одна многомерная оптимизационная задача разбивается на примерно  $d(d+1)/2$  небольших задач. Кроме того, данный подход позволяет зависимости между рядами меняться со временем.

В эмпирической части работы моделируются валютные курсы трех европейских развивающихся стран (CZK Чехии, PLN Польши и HUF Венгрии) и зависимость между ними. Начав с моделей GARCH/GJR для маргинальных распределений, я двигаюсь к попарным копулам, соединяющим маргинальные распределения, и, наконец, к копуле, соединяющей парные копулы. В качестве парных копул используются копулы Стьюдента с эволюцией параметра зависимости из Tse & Tsui (2002).

Выбор этих конкретных финансовых рядов продиктован несколькими причинами. Во-первых, довольно мало исследований посвящено эконометрическому моделированию валютных курсов развивающихся стран. Во-вторых, моделирование зависимости валютных курсов развивающихся стран может пролить свет на существование финансового заражения среди этих стран. Например, Rodriguez (2007) использовал копулы с Марковским переключением режима для моделирования динамики цен акций в развивающихся странах во время кризиса. Наконец, я выбрал валюты трех стран из Центральной Европы по той причине, что, несмотря на принадлежность к рискованным активам, они демонстрируют более стабильное поведение. Большинство других валют развивающихся стран имеют жесткую привязку к твердой валюте (USD или EUR), которая при разрушении вызывает девальвацию, а также большую волатильность и куртозис. В действительности, в течение рассматриваемого периода HUF и PLN плавали относительно свободно, в то время как CZK был крепче привязан к евро.

Обнаружилась асимметрия в поведении данных обменных курсов, что делает их скорее похожими на цены акций или других рискованных активов, чем на обменные курсы развитых стран. А именно, модель GJR из Glosten, Jagannathan & Runkle (1993) подгоняется под HUF и PLN значительно лучше, чем стандартный GARCH. GJR предполагает, что существует асимметричная обратная связь для волатильности; это означает, что девальвация валюты приводит к более сильной волатильности на следующий день. Tse (1998) показал,

что этот эффект не наблюдается в обменных курсах развитых стран. Кроме того, существует асимметрия распределения дневных доходностей, выражающаяся в ненулевой скошенности распределения. Оказывается, что модели со скошенным распределением Стьюдента в качестве распределения ошибки подгоняются под HUF и PLN лучше, чем стандартный Стьюдент. Однако, асимметричные модели не обеспечивают лучшую подгонку под CZK, сильнее привязанному к евро. Этот факт косвенно подтверждает гипотезу о рискованном поведении валют развивающихся стран по сравнению с симметричным поведением валют развитых стран. Предыдущие исследования асимметричности валют развивающихся стран получали неоднозначные результаты. Так Longmore & Robinson (2004) находят асимметричность в поведении доллара Ямайки, в то время как Sandoval (2006) оспаривает прогнозное превосходство моделей с асимметричной волатильностью для валют Латинской Америки. Griebeler (2010) утверждает, что нет связи между качеством подгонки моделей с асимметричной волатильностью и принадлежностью валюты к развивающимся/развитым странам.

## 2 Условные копулы

Краеугольным камнем применения теории копул для временных рядов является теорема Паттона, аналог теоремы Склера для условных копул.

**Теорема 1 (Patton 2002)** Пусть  $F$  будет функцией распределения  $(y_1, \dots, y_d)$  условно на  $w$ ,  $F_i$  будут (маржинальными) функциями распределения  $y_i$  условно на  $w$ . Предположим, что  $F$  непрерывна. Тогда существует  $C(\cdot | w) : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ , называемая (условной) копулой, такая, что

$$F(y_1, \dots, y_d | w) = C(F_1(y_1 | w), \dots, F_d(y_d | w) | w).$$

Если у  $F$  есть плотность  $f$  и, следовательно, у  $F_i$  есть плотности  $f_i$ , тогда следующая формула верна для плотностей:

$$f(y_1, \dots, y_d | w) = c(F_1(y_1 | w), \dots, F_d(y_d | w) | w) \prod_{i=1}^d f_i(y_i | w), \quad (1)$$

где  $c = \partial_1 \dots \partial_d C$  и  $\partial_i$  обозначает частную производную по  $i$ -му аргументу.

Пусть  $y^t = (y_1^t, \dots, y_d^t)$ ,  $t = 1, \dots, T$  описывает многомерный временной ряд. Обозначим многомерную и маргинальную историю как

$$\mathcal{Y}^{t-1} = \{y^{t-1}, \dots, y^1\} \quad \text{и} \quad \mathcal{Y}_i^{t-1} = \{y_i^{t-1}, \dots, y_i^1\}.$$

Логарифм функции правдоподобия, характеризующей систему, есть

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^T \ell^t = \sum_{t=1}^T \ln f(y^t | \mathcal{Y}^{t-1}; \theta).$$

Используя (1), можно разложить

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^d \mathcal{L}_i + \mathcal{L}_{\text{Cоп}},$$

где

$$\mathcal{L}_i = \sum_{t=1}^T \ell_i^t, \quad \mathcal{L}_{\text{Cоп}} = \sum_{t=1}^T \ell_{\text{Cоп}}^t.$$

Здесь

$$\ell_i^t = \ln f_i(y_i^t | \mathcal{Y}_i^{t-1}; \theta_i),$$

в то время как лог-функция правдоподобия копулы вычисляется как

$$\ell_{\text{Cоп}}^t = \ln c(F_1(y_1^t | \mathcal{Y}_1^{t-1}; \theta_1), \dots, F_d(y_d^t | \mathcal{Y}_d^{t-1}; \theta_d) | \mathcal{Y}^{t-1}; \theta_{\text{Cоп}}).$$

Теперь мы хотим оценить  $\theta = (\theta_1^\top, \dots, \theta_d^\top, \theta_{\text{Cоп}}^\top)^\top$ . Patton (2002) предлагает следующую 2SML процедуру. Сначала оцениваем

$$\hat{\theta}_i = \operatorname{argmax}_{\theta_i} \mathcal{L}_i(\theta_i).$$

Затем подставляем  $\hat{\theta}_i$  в  $\ell_{\text{Cоп}}^t$  и максимизируем выбирая  $\theta_{\text{Cоп}}$ .

$$\hat{\theta}_{\text{Cоп}} = \operatorname{argmax}_{\theta_{\text{Cоп}}} \mathcal{L}_{\text{Cоп}}(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_d, \theta_{\text{Cоп}}).$$

**Замечание 2** Patton (2002) доказал, что в довольно скромных предположениях 2SML производит состоятельную и асимптотически нормальную оценку. Хотя она и не является эффективной, она может быть приведена к ней с помощью состоятельно оцененной асимптотической ковариационной матрицы. Вычислительно 2SML является гораздо более эффективным, чем ML, примененный к многомерной плотности.

### 3 Вьющиеся копулы

Вьющиеся копулы были впервые предложены Джо (1996) для моделирования многомерных данных через конструкции с попарными копулами. Слегка изменив обозначения, будем обозначать  $d$ -мерную функцию распределения и плотность  $(y_1, \dots, y_d)$  как  $F_{1\dots d}$  и  $f_{1\dots d}$ . Также обозначим за  $F_{ij|\mathbf{k}}$  двумерную функцию распределения  $(y_i, y_j)$  условную на  $(y_{k_1}, \dots, y_{k_p})$ , где  $(k_1, \dots, k_p)$  обозначается мульти-индексом  $\mathbf{k}$ . Используя теорему Паттона, получаем

$$F_{ij|\mathbf{k}} = C_{ij|\mathbf{k}}(F_{i|\mathbf{k}}, F_{j|\mathbf{k}}),$$

или

$$f_{ij|\mathbf{k}} = c_{ij|\mathbf{k}}(F_{i|\mathbf{k}}, F_{j|\mathbf{k}})f_{i|\mathbf{k}}f_{j|\mathbf{k}}$$

для плотностей. Используя разложение плотностей типа

$$f_{1\dots d} = f_d f_{d-1|d} \dots f_{1|2\dots d} \tag{2}$$

и формулы Джо

$$F_{i|\mathbf{k}} = \partial_2 C_{ij|\mathbf{k}}(F_{i|\mathbf{k}}, F_{j|\mathbf{k}}) \tag{3}$$

и

$$f_{i|\mathbf{k}} = c_{ij|\mathbf{k}}(F_{i|\mathbf{k}}, F_{j|\mathbf{k}})f_{i|\mathbf{k}},$$

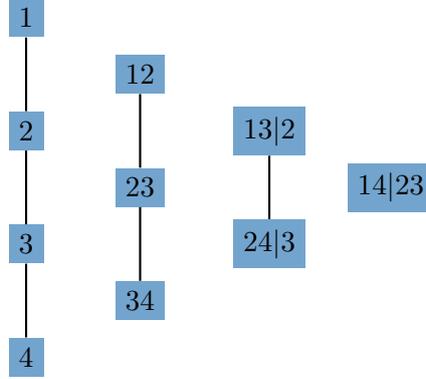
можно построить следующее разложение:

$$f_{1\dots d} = \prod_{k=1}^d f_k \prod_{j=1}^{d-1} \prod_{i=1}^{d-j} c_{i,i+j|i+1,\dots,i+j-1}. \tag{4}$$

Это не единственное разложение такого типа. Используя другие факторизации (2), можно получить другие разложения. Bedford & Cooke (2002) предложили представлять формулы вида (4) с помощью диаграмм.

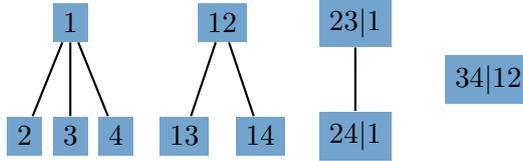
**Пример 3** Следующее разложение соответствует изображенному объединению деревьев (лесу). Когда каждое дерево в лесу является линейным графом, разложение называется *D-вьюн (D-vine)*.

$$f_1 f_2 f_3 f_4 \cdot c_{12} c_{23} c_{34} \cdot c_{13|2} c_{23|4} \cdot c_{14|23}$$



**Пример 4** Другой лес будет соответствовать другому разложению. Когда каждое дерево в лесу имеет один корень, а все остальные вершины являются листьями, разложение называется *канонический вьюн (C-vine)*.

$$f_1 f_2 f_3 f_4 \cdot c_{12} c_{13} c_{14} \cdot c_{23|1} c_{24|1} \cdot c_{34|12}$$



**Замечание 5** Не каждый лес производит вьюн-разложение. Леса, которые могут производить вьюны, будем называть *плодородными*.

Пусть  $\mathcal{F}$  будет плодородным лесом. Обозначим  $\text{Vert } \mathcal{F}$  вершины леса,  $\nu \in \text{Vert } \mathcal{F}$  будет иметь вид  $ij|\mathbf{k}$  для некоторых  $i, j, \mathbf{k}$  (некоторые из них могут быть пустыми как в вершине  $i$  соответствующей маргинальным  $f_i$ ). Для удобства обозначим  $c_i = f_i$ . Тогда вьюн-разложение может быть записано как

$$f_{1\dots d} = \prod_{\nu \in \text{Vert } \mathcal{F}} c_\nu. \tag{5}$$

Каждому  $\nu = ij|\mathbf{k}$  мы можем сопоставить степень  $\deg \nu = \dim i + \dim j + \dim \mathbf{k}$ . Здесь  $\dim i$  равна 0, если  $i$  пусто и 1 иначе;  $\dim \mathbf{k} = p$  для  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ . Обозначим  $\text{Vert}_s \mathcal{F} = \{\nu \in \mathcal{F} \mid \deg \nu = s\}$ . Следовательно, мы имеем  $\text{Vert } \mathcal{F} = \coprod_{s=1}^d \text{Vert}_s \mathcal{F}$ . Таким образом, мы можем перегруппировать (5) в

$$f_{1\dots d} = \prod_{s=1}^d \prod_{\nu \in \text{Vert}_s \mathcal{F}} c_\nu. \tag{6}$$

## 4 Оценка dSML

В этом разделе опишем процедуру dSML. Вектор параметров, который нужно оценить, обозначим  $\theta = (\theta_\nu^\top \mid \nu \in \text{Vert } \mathcal{F})^\top$ . Обозначим  $\theta_{[s]} = (\theta_\nu^\top \mid \nu \in \text{Vert } \mathcal{F}, \deg \nu \leq s)^\top$ ,

$\theta_{(s)} = (\theta_\nu^\top \mid \nu \in \text{Vert}_s \mathcal{F})^\top$ . Также введем обозначение  $y_{\mathbf{k}}^t = (y_{k_1}^t, \dots, y_{k_p}^t)$  для временных подрядов, а  $\mathcal{Y}_{\mathbf{k}}^{t-1} = \{y_{\mathbf{k}}^{t-1}, \dots, y_{\mathbf{k}}^1\}$  для подыстории. Логарифм функции правдоподобия запишется как

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^T \ell^t = \sum_{t=1}^T \ln f_{1\dots d}(y^t \mid \mathcal{Y}^{t-1}; \theta).$$

Теперь используя (6), разложим

$$\mathcal{L} = \sum_{s=1}^d \mathcal{L}_{(s)} = \sum_{s=1}^d \sum_{\nu \in \text{Vert}_s \mathcal{F}} \mathcal{L}_\nu, \quad \mathcal{L}_\nu = \sum_{t=1}^T \ell_\nu^t.$$

Здесь

$$\ell_{ij|\mathbf{k}}^t = \ln c_{ij|\mathbf{k}}(F_{i|\mathbf{k}}(y_i^t \mid \mathcal{Y}_{\mathbf{k}}^{t-1}; \theta_{[s-1]}), F_{j|\mathbf{k}}(y_j^t \mid \mathcal{Y}_{\mathbf{k}}^{t-1}; \theta_{[s-1]} \mid \mathcal{Y}_{\mathbf{k}}^{t-1}; \theta_{ij|\mathbf{k}}), \quad (7)$$

где  $\deg ij|\mathbf{k} = s$ . Причина, по которой  $F_{i|\mathbf{k}}$  зависит только от  $\theta_{[s-1]}$ , — это формула Джо (3). А именно, пусть  $\mathbf{k} = (k, \mathbf{l})$ , затем

$$F_{i|\mathbf{k}\mathbf{l}} = \partial_2 C_{ik|\mathbf{l}}(F_{i|\mathbf{l}}(y_i^t \mid \mathcal{Y}_{\mathbf{l}}^{t-1}; \theta_{[s-2]}), F_{k|\mathbf{l}}(y_k^t \mid \mathcal{Y}_{\mathbf{l}}^{t-1}; \theta_{[s-2]} \mid \mathcal{Y}_{\mathbf{l}}^{t-1}; \theta_{ik|\mathbf{l}}).$$

Поскольку  $\deg ik|\mathbf{l} = s - 1$ , предложение доказано методом математической индукции.

Метод математической индукция дает идею, как оценить параметры. Сначала требуется оценить параметры маргинальных распределений:

$$\hat{\theta}_i = \operatorname{argmax}_{\theta_i} \mathcal{L}_i(\theta_i).$$

$\hat{\theta}_{[1]}$  теперь равняется  $(\hat{\theta}_i^\top \mid i = 1, \dots, d)^\top$ . Предполагая, что мы имеем оценку  $\hat{\theta}_{[s-1]}$ , можно подставить ее в (7), чтобы найти

$$\hat{\theta}_{ij|\mathbf{k}} = \operatorname{argmax}_{\theta_{ij|\mathbf{k}}} \mathcal{L}_{ij|\mathbf{k}}(\hat{\theta}_{[s-1]}, \theta_{ij|\mathbf{k}}).$$

Затем  $\hat{\theta}_{[s]} = (\hat{\theta}_\nu^\top \mid \nu \in \text{Vert} \mathcal{F}, \deg \nu \leq s)^\top$ , и процедура повторяется до шага  $s = d$ . Наконец,  $\hat{\theta} = \hat{\theta}_{[d]}$ .

**Замечание 6** В приложении доказано, что в присутствии стандартных предположений  $dSML$  приводит к состоятельной и асимптотически нормальной оценке (в точности как  $2SML$ ). Также вычислена асимптотическая ковариационная матрица оценки, которую можно использовать для вывода скорректированной оценки Ньютона–Рафсона. Эта оценка уже будет эффективна.

## 5 Описание данных

Мы используем курсы цен покупки на закрытие дня валютных пар восточноевропейских стран USD/CZK, USD/HUF и USD/PLN, представленные на сайте FX-брокера OANDA Corp<sup>1</sup>. Котировка USD/PLN 4.5 означает, что 1 доллар США обменивается на 4,5 польских злотых. Рассматриваемый временной промежуток длится с декабря 1999 г. до декабря 2010 г., образуя 2869 наблюдений. Обменные курсы  $S_t$  преобразуются в дневные логарифмические доходности в процентах  $r_t = 100 \ln S_t / S_{t-1}$ . Сводные статистики представлены в таблице 1. Положительная скошенность означает, что в среднем валюты испытывают более сильные девальвации, чем ревальвации, а положительный (добавочный) куртозис подтверждает обычное для финансовых доходностей распределение с толстыми хвостами.

Таблица 1: Сводные статистики доходностей USD/CCY

Статистика	CZK	HUF	PLN
Среднее	-0,022	-0,006	-0,012
Медиана	-0,008	-0,035	-0,033
Стандартное отклонение	0,771	0,883	0,872
Скошенность	0,138	0,456	0,448
Куртозис	3,14	5,07	5,56
Минимум	-4,20	-5,21	-5,73
Максимум	4,45	6,29	6,05

*Замечания:* Выборка с декабря 1999 г. до декабря 2010 г. (2869 наблюдений). Данные представлены для  $r_t = 100 \ln S_t/S_{t-1}$ .

Таблица 2: Тесты Льюнга–Бокса

Статистика Льюнга–Бокса	CZK		HUF		PLN	
$Q_r(50)$	76,57	[0,0091]	102,22	[0,0000]	176,98	[0,0000]
$Q_{rr}(50)$	983,32	[0,0000]	946,33	[0,0000]	2511,75	[0,0000]

*Замечание:* p-Значения представлены в квадратных скобках.

В таблице 2 представлен результаты тестов Льюнга–Бокса с 50 лагами, которых достаточно для примерно 3000 наблюдений (Hsieh 1989). Результаты тестов показывают автокорреляцию и гетероскедстичность доходностей.

Однако, если судить по графику 1, можно увидеть, что нет очевидной сезонности, соответствующей дням недели. Поэтому мы будем опускать переменные-индикаторы, соответствующие дням недели, в спецификации условного среднего. На графике 2 изображены диаграммы рассеяния доходностей валютных пар. Валюты стран центральной Европы демонстрируют сильную корреляцию обменных курсов.

## 6 Моделирование маргинальных распределений

Следуя теоретическому подходу, описанному в разделах 2 и 3, мы сначала моделируем одномерные ряды доходностей. Для этой цели мы используем модели GARCH и GJR. Условное среднее моделируется процессом AR(1); однако, в случае USD/CZK авторегрессионная компонента не является значимой, не улучшает подгонку, и поэтому отбрасывается. Условная дисперсия моделируется как GARCH(1,1) и GJR(1,1), модель, впервые предложенная в Glosten, Jagannathan & Runkle (1993). Нормализованные ошибки предполагаются условно распределенными по Стьюденту или скошенному Стьюденту. Скошенность вводится в распределение Стьюдента по Fernandez & Steel (1998):

$$p(z; \xi) = \frac{2}{\xi + 1/\xi} (f(z/\xi)\mathbf{I}_{\{z \geq 0\}} + f(z\xi)\mathbf{I}_{\{z \leq 0\}}),$$

где  $f$  — стандартное распределение Стьюдента с  $\kappa$  степеней свободы. Скошенность равняется

$$\mathbf{E}z^3 = \frac{\xi^4 - 1/\xi^4}{\xi + 1/\xi} \mathbf{M}_3,$$

<sup>1</sup>[www.oanda.com/currency/historical-rates](http://www.oanda.com/currency/historical-rates)

График 1: Функция автокорреляции для доходностей и квадратов доходностей

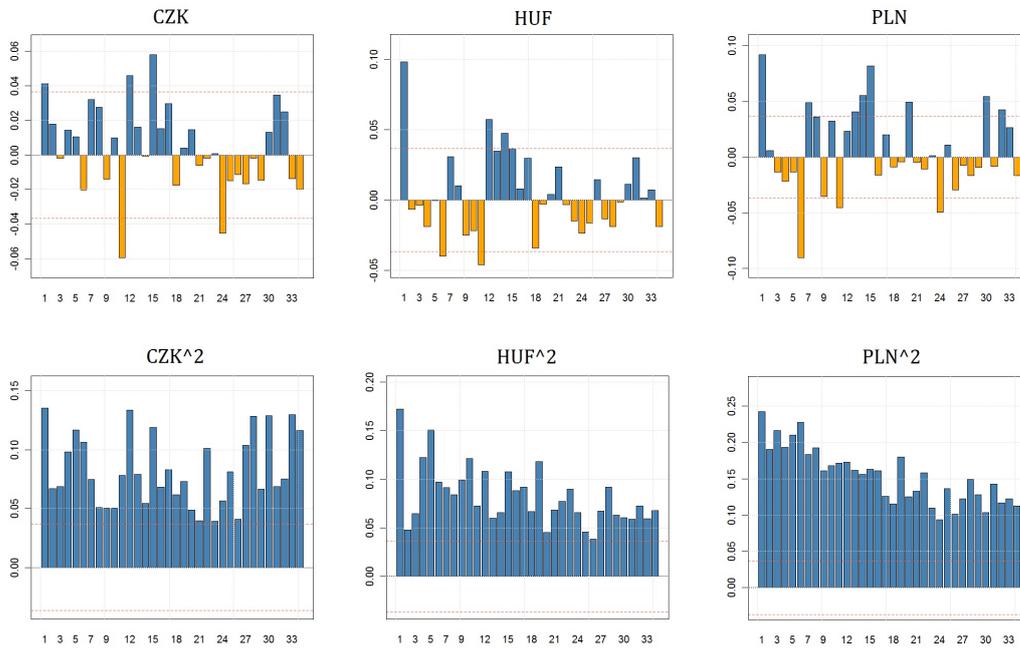
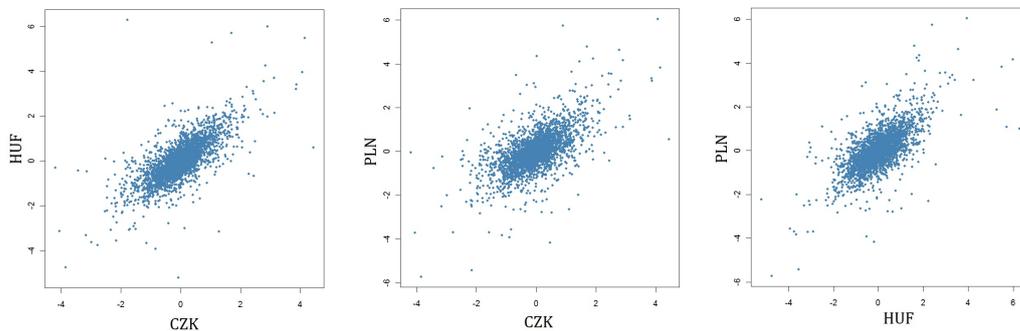


График 2: Диаграммы рассеяния доходностей пар USD/CCY



где

$$M_3 = 2 \int_0^{\infty} s^3 f(s) ds.$$

Таким образом, необходимо оценить параметры в спецификации для условного среднего

$$r_t = \mu + \varphi r_{t-1} + \epsilon_t, \quad \text{где } \epsilon_t = \sigma_t z_t \text{ и } z_t \propto St(\xi, \kappa).$$

и условной дисперсии GARCH(1,1)

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

или GJR(1,1)

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha (|\epsilon_{t-1}| - \gamma \epsilon_{t-1})^2 + \beta \sigma_{t-1}^2.$$

Коэффициенты в уравнении для дисперсии имеют простую экономическую интерпретацию. Постоянство волатильности соответствует  $\beta$ , дисперсия GARCH на длинных периодах равняется  $\omega / (1 - \alpha - \beta)$ , а  $\gamma$  измеряет величину эффекта рычага. То есть, отрицательная  $\gamma$  с большим абсолютным значением означает, что девальвация валюты вызывает больший всплеск волатильности, чем ревальвация.

Чтобы оценить уравнения, я использую метод максимального правдоподобия (ML). Вычисления выполнены в R с помощью пакета fGarch. В таблице 3 представлены значения информационных критериев Акаике и Шварца для оцененных моделей. Можно заметить, что скошенный GJR превосходит другие модели для USD/HUF и USD/PLN, в то время как стандартный GARCH является лучшей моделью для USD/CZK.

Таблица 3: Качество подгонки

		GARCH	Sk-GARCH	GJR	Sk-GJR
CZK:	<i>AIC</i>	<b>2,128</b>	2,129	2,129	2,129
	<i>BIC</i>	<b>2,139</b>	2,141	2,141	2,144
HUF:	<i>AIC</i>	2,450	2,443	2,367	<b>2,364</b>
	<i>BIC</i>	2,460	2,456	2,382	<b>2,380</b>
PLN:	<i>AIC</i>	2,249	2,247	2,247	<b>2,244</b>
	<i>BIC</i>	2,262	2,261	2,261	<b>2,260</b>

*Замечания:* Показаны значения информационных критериев Акаике и Шварца. Для USD/CZK условное среднее не включает в себя AR(1) компоненту. Жирным выделены минимальные значения критериев.

Статистическая значимость скошенности и эффекта рычага проверяется с помощью теста LR, что возможно из-за вложенности моделей. Тестовая статистика равняется  $LR = 2(\max \mathcal{L} - \max \mathcal{L}_0)$ , которая асимптотически распределена как хи-квадрат с числом степеней свободы равным количеству ограничений в гипотезе. Проверяются две гипотезы  $\gamma = 0$  и  $\xi = 1$  для USD/HUF и USD/PLN, и обе отвергаются на 1% уровне. Поскольку USD/CZK демонстрирует большую симметрию, проверяется совместная гипотеза  $\gamma = 0$  &  $\xi = 1$  для USD/CZK. Это необходимо сделать, ведь из того, что мы не можем отвергнуть обе гипотезы  $\gamma = 0$  и  $\xi = 1$ , не следует, что мы не сможем отвергнуть более сильную гипотезу  $\gamma = 0$  &  $\xi = 1$ . Таблица 4 показывает, что нет оснований отвергать нулевую скошенность и эффект рычага для CZK.

Таблица 4: Тест отношения правдоподобия

	CZK	HUF		PLN	
$H_0$	$\gamma = 0$ & $\xi = 1$	$\gamma = 0$	$\xi = 1$	$\gamma = 0$	$\xi = 1$
LR статистика	1,318	9,776	11,362	10,756	10,387
p-значение	0,5173	0,0018	0,0007	0,0010	0,0013

*Замечания:* Для гипотез  $\gamma = 0$  и  $\xi = 1$  мы сравниваем LR статистику с квантилями  $\chi^2(1)$  распределения. Для  $\gamma = 0$  &  $\xi = 1$  мы сравниваем LR с квантилями  $\chi^2(2)$ .

В таблице 5 представлены оцененные параметры для предложенных моделей, а также некоторые диагностические значения. Нетрудно видеть, что скошенная модель GJR обеспечивает очень хорошую подгонку для USD/HUF и довольно хорошую для USD/PLN. Кроме того, модель GJR смогла объяснить почти всю гетероскедастичность в рядах. Малая значимость  $\omega$ , а также непрохождение теста Льюнга-Бокса говорят, что GARCH плохо подгоняет USD/CZK. Похоже, что волатильность сохраняется еще дольше, поскольку  $\hat{\alpha} + \hat{\beta} \approx 1$ , однако модель IGARCH не дает улучшения качества подгонки (результаты не приводятся). В дополнение, я диагностирую качество подгонки тестом Колмогорова-Смирнова. С помощью оцененной функции плотности я перевожу стандартизированные ошибки в  $u_i \in [0, 1]$  и вычисляю  $D = \sup |\hat{G}(u) - u|$ , которая имеет асимптотическое распределение Колмогорова.

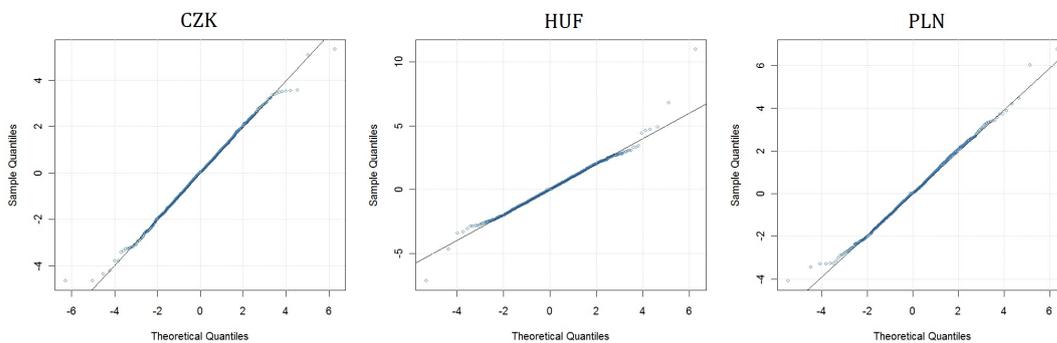
На графике 3 изображены QQ-диаграммы, которые демонстрируют разумное качество подгонки данных.

Таблица 5: Оценки параметров и диагностические значения

Parameter	CZK		HUF		PLN	
$\mu$	-0,029*	(0,011)	-0,011	(0,014)	-0,028*	(0,013)
$\varphi$			0,075***	(0,018)	0,060**	(0,019)
$\omega$	0,0017†	(0,0010)	0,0042*	(0,0017)	0,0152***	(0,0042)
$\alpha$	0,038***	(0,007)	0,019**	(0,006)	0,072***	(0,014)
$\gamma$			-0,405*	(0,193)	-0,214**	(0,076)
$\beta$	0,962***	(0,006)	0,971***	(0,006)	0,902***	(0,016)
$\xi$			1,093***	(0,029)	1,083***	(0,027)
$\kappa$	5,47***	(0,57)	6,22***	(0,70)	6,02***	(0,70)
LogLik	-3047,8		-3382,9		-3210,8	
$Q_z(50)$	57,17	[0,1053]	52,13	[0,1359]	73,77**	[0,0018]
$Q_{zz}(50)$	86,23***	[0,0002]	14,69	[1]	34,92	[0,7723]
$D$	0,0167	[0,3983]	0,0089	[,09775]	0,0186	[0,2747]

Замечания: Стандартные ошибки приведены в круглых скобках, а р-значения в квадратных. Уровни значимости: 0,1% = \*\*\*, 1% = \*\*, 5% = \*, 10% = †. LogLik соответствует логарифму функции правдоподобия.

График 3: QQ-диаграммы стандартизированных остатков



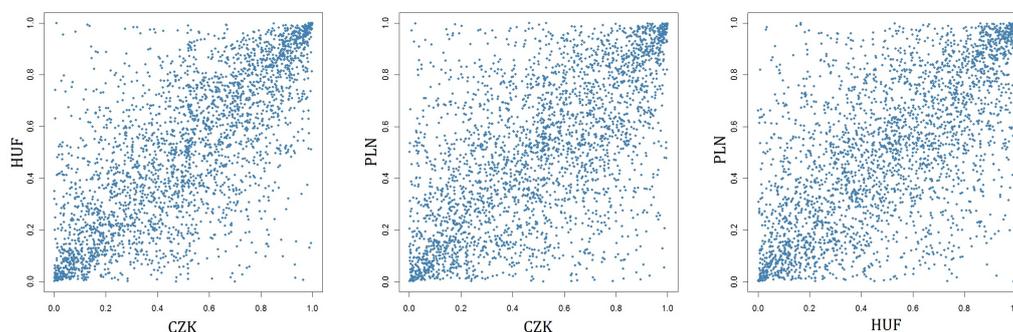
## 7 Моделирование копул

В данном разделе мы будем моделировать зависимость между валютами. Модели предполагаются одинаковыми на каждом шаге, а именно, копулы Стьюдента с эволюцией параметра зависимости как в Tse & Tsui (2002). Сначала оцениваются копулы для пары валют. Затем, используя вышеизложенную технику, я оцениваю копулу, которая соединит две попарные. Как было объяснено в разделе 3, существует несколько различных выходящих моделей для одних и тех же данных. В нашем случае ( $d = 3$ ) существуют 3 модели: 1–2–3 12–23 13|2, 2–3–1 23–13 12|3, и 3–1–2 13–12 23|1. Здесь 1 соответствует CZK, 2 – HUF и 3 – PLN. Мы выберем лучшую модель из этих трех и протестируем качество подгонки. Для этого мы будем использовать методологию Diebold, Gunther & Tay (1998).

На графике 4 изображены остатки, преобразованные с помощью оцененных маргинальных распределений (маргинальное интегральное вероятностное преобразование). На графике не видно значительной асимметрии.

Я буду использовать копулу Стьюдента для моделирования, поскольку в нее легко зашить непостоянный по времени параметр зависимости, который можно интерпретировать

График 4: диаграммы трансформированных остатков



как корреляцию. Двумерная копула Стьюдента задается формулой

$$C(u, v | \theta, \nu) = T_{\theta, \nu}^{-1}(T_{\nu}^{-1}(u), T_{\nu}^{-1}(v)),$$

где  $T_{\theta, \nu}$  является двумерной функцией распределения Стьюдента,  $T_{\nu}$  является одномерной функцией распределения Стьюдента,  $-1 < \theta < 1$ ,  $\nu$  – число степеней свободы.

Параметр зависимости  $\theta$  подчиняется следующему уравнению:

$$\theta_t = (1 - \varphi - \psi)\bar{\theta} + \varphi\tau_{t-1} + \psi\theta_{t-1}.$$

Здесь  $\varphi, \psi \geq 0$ ,  $\varphi + \psi \leq 1$ , скользящая корреляция  $\tau_{t-1}$  задается формулой

$$\tau_{t-1} = \frac{\sum_{s=1}^m u_{t-s}v_{t-s}}{(\sum_{s=1}^m u_{t-s}^2 \sum_{s=1}^m v_{t-s}^2)^{1/2}}.$$

Копула Стьюдента с описанной структурой зависимости подгоняется под данные методом из раздела 4. Результаты оценивания dSML представлены в таблице 6.

Таблица 6: Оценка попарных копул

	$\theta$	$\varphi$	$\psi$	$\nu$	Log Lik
12	0,78	0,60	0,01	5,47	1282,4
13	0,68	0,35	0,39	6,15	846,4
23	0,71	0,41	0,31	5,85	920,9
12 3	0,59	0,56	0,09	6,77	570,9
13 2	0,31	0,31	0,03	9,76	152,1
23 1	0,71	0,71	0,04	6,16	984,1

Используя аддитивность лог-правдоподобия, мы можем выбрать в качестве лучшей модель с максимальным лог-правдоподобием. Это модель 3–1–2 13–12 23|1, как видно из таблицы 7.

Таблица 7: Выбор выющейся модели

	LogLik
12 23 13 2	2355,4
23 13 12 3	2338,2
13 12 23 1	<b>3112,9</b>

Я провожу тесты Колмогорова–Смирнова для  $u_{2|1}, u_{3|1}, u_{2|13}, u_{3|12}$  для проверки качества подгонки данной модели. Результаты являются положительными, как видно из таблицы 8.

Таблица 8: Тесты Колмогорова–Смирнова

	$D$	р-значение
$u_{2 1}$	0,0158	0,4713
$u_{3 1}$	0,0209	0,1614
$u_{2 13}$	0,0197	0,2157
$u_{3 12}$	0,0178	0,3214

## 8 Выводы

В данной работе предложен  $d$ -шаговый метод максимального правдоподобия (dSML) для оценивания условных выходящих копул. Доказано, что dSML дает состоятельную и асимптотически нормальную оценку. Кроме того, он предоставляет состоятельную оценку матрицы ковариации. Этот метод вычислительно эффективнее, чем стандартное оценивание методом максимального правдоподобия, и, таким образом, позволяет рассматривать более сложные модели (например, с непостоянными по времени параметрами зависимости).

Из исследования видно, что разные выходящие модели приводят к подгонкам различного качества. Было бы интересно придумать алгоритм, который бы находил оптимальную выходящую модель за разумное время.

## Благодарности

Я признателен моему научному руководителю Станиславу Анатольеву за введение в круг вопросов и конструктивные советы. Я благодарен Сергею Воронцову, Ренату Хабибуллину, Игорю Хейфецу и участникам семинара про прогнозированию временных рядов за полезные комментарии и за вдохновляющую атмосферу.

## Приложение: асимптотические свойства dSML

В этом приложении я опираюсь на теорию 2SML оценки из White (1994) для того, чтобы доказать асимптотическую нормальность оценки dSML. Вначале наложим ограничения на лог-функции правдоподобия  $\ell_\nu^t$ ,  $\mathcal{L}_\nu$ , функции вклада  $s_\nu^t = \nabla_\nu \ell_\nu^t$ ,  $\mathcal{S}_\nu = \sum_{t=1}^T s_\nu^t$ , и гессианы  $\nabla_\mu^T s_\nu^t$ ; градиент рассматривается как вектор-столбец. Пусть  $\theta$  будет истинным параметром,  $\hat{f}$  обозначает  $f(\hat{\theta})$ , а  $\dot{f}$  обозначает  $f(\dot{\theta})$  для любой функции  $f(\theta)$ . В последующем я буду опускать индекс  $T$  из  $\mathcal{L}^T, \mathcal{S}^T, A^T, B^T$  для краткости. Данные предположения должны выполняться для всех  $\nu, \mu \in \text{Vert } \mathcal{F}$ ,  $\deg \nu = s$ ,  $t = 1, \dots, T$ , и произвольного натурального  $T$ .

- A1.
  - $\Theta_\nu$  компактное подмножество Евклидова пространства
  - $c_\nu^t$  дважды непрерывно дифференцируема на  $\Theta_\nu$  почти наверное
- A2.
  - $\mathbb{E} \mathcal{L}_\nu(\dot{\theta}_{[s-1]}, \theta_\nu)$  максимизируется в единственной внутренней точке из  $\Theta_\nu$
- A3.
  - $\mathbb{E} \mathcal{L}_\nu$  конечно и непрерывно на  $\Theta_\nu$  равномерно по  $T$
  - $\{\ell_\nu^t\}$  подчиняется слабому равномерному закону больших чисел (РЗБЧ) на  $\Theta_\nu$
  - $\mathbb{E} \mathcal{L}_\nu / T = O(1)$  при  $T \rightarrow \infty$  равномерно по  $\Theta_\nu$
- A4.
  - $\mathbb{E} \mathcal{S}_\nu$  конечно и непрерывно на  $\Theta_\nu$  равномерно по  $T$
  - $\{s_\nu^t\}$  подчиняется слабому РЗБЧ на  $\Theta_\nu$

- A5.**
- $\mathbb{E}\nabla_{\mu}^{\top}\mathcal{S}_{\nu}$  конечно и непрерывно на  $\Theta_{\nu}$  равномерно по  $T$
  - $\{\nabla_{\mu}^{\top}s_{\nu}^t\}$  подчиняется слабому РЗБЧ на  $\Theta_{\nu}$
  - $\mathbb{E}\nabla_{\nu}^{\top}\mathring{\mathcal{S}}_{\nu}/T = O(1)$  при  $T \rightarrow \infty$  и является неотрицательно определенной

**Теорема 7 (Состоятельность dSML)** *Предположим, A1–A5 верны. Тогда  $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \mathring{\theta}$ .*

**Доказательство.** Воспользуемся методом математической индукции, показав что  $\hat{\theta}_{\nu} \xrightarrow{P} \mathring{\theta}_{\nu}$  для всех  $\nu$ . Первый шаг – это состоятельность оценок максимального правдоподобия параметров маржинальных распределений  $\hat{\theta}_i$ . Оно следует из теоремы 3.13 в White (1994). Затем, предполагая, что  $\hat{\theta}_{[s-1]}$  состоятельно оценивает  $\mathring{\theta}_{[s-1]}$ , мы применяем теорему 3.10 из White (1994) к 2SML оценке  $\hat{\theta}_{\nu} = \operatorname{argmax}_{\theta_{\nu}} \mathcal{L}_{\nu}(\hat{\theta}_{[s-1]}, \theta_{\nu})$ . ■

Следующее предположение необходимо для асимптотической нормальности  $\hat{\theta}$ .

- A6.**
- $\{s^t/\sqrt{T}\}$  подчиняется треугольной ЦПТ с матрицей ковариации  $\mathring{B}$
  - $\mathring{B} = O(1)$  при  $T \rightarrow \infty$

Матрица  $\mathring{B}$  положительно определена и имеет блочную структуру  $(\mathring{B}_{\mu\nu} \mid \mu, \nu \in \operatorname{Vert} \mathcal{F})$ , где  $B_{\mu\nu} = \mathbb{E} \left[ \sum_{t=1}^T s_{\mu}^t (s_{\nu}^t)^{\top} / T \right]$ .

**Теорема 8 (Асимптотическая нормальность dSML)** *Пусть выполняются A1–A6. Тогда*

$$\mathring{B}^{-1/2} \mathring{A} \sqrt{T} (\hat{\theta} - \mathring{\theta}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, I),$$

где  $\mathring{A}$  следующая сложная блочная структура:

$$A = \begin{pmatrix} A_{(11)} & 0 & \dots & 0 \\ A_{(21)} & A_{(22)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{(s1)} & A_{(s2)} & \dots & A_{(ss)} \end{pmatrix}$$

и  $A_{(qp)} = (\mathbb{E}\nabla_{\mu}^{\top}\mathcal{S}_{\nu}/T \mid \mu \in \operatorname{Vert}_p \mathcal{F}, \nu \in \operatorname{Vert}_q \mathcal{F})$ .

**Доказательство.** Запишем разложение Тейлора функции вклада  $\hat{\mathcal{S}}/T$  в точке  $\mathring{\theta}$ . Вспомним, что по построению  $\hat{\theta}$  мы имеем  $\hat{\mathcal{S}} = 0$ . Таким образом,

$$\hat{\mathcal{S}}/T = \mathring{\mathcal{S}}/T + \bar{A}(\hat{\theta} - \mathring{\theta}) = 0,$$

где  $\bar{A}$  – это матрица  $A$  в точке  $\bar{\theta}$ , лежащей покомпонентно между  $\hat{\theta}$  и  $\mathring{\theta}$ . Из этого уравнения следует, что

$$\bar{A} \sqrt{T} (\hat{\theta} - \mathring{\theta}) = -\mathring{\mathcal{S}}/\sqrt{T}.$$

Поскольку  $A$  непрерывно и  $\bar{\theta} \xrightarrow{P} \mathring{\theta}$  при  $T \rightarrow \infty$ , получаем

$$\mathring{A} \sqrt{T} (\hat{\theta} - \mathring{\theta}) = -\mathring{\mathcal{S}}/\sqrt{T} + o_p(1).$$

Умножая на  $\mathring{B}^{-1/2}$ , мы получаем

$$\mathring{B}^{-1/2} \mathring{A} \sqrt{T} (\hat{\theta} - \mathring{\theta}) = -\mathring{B}^{-1/2} \mathring{\mathcal{S}}/\sqrt{T} + o_p(1) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, I).$$

Предельное распределение следует из предположения A6. ■

Последнее предположение необходимо для получения состоятельных оценок асимптотической ковариационной матрицы.

- A7.**
- $B$  конечна и непрерывна на  $\Theta$  равномерно по  $T$
  - $\{s^t(s^t)^\top\}$  удовлетворяет слабому РЗБЧ на  $\Theta$

**Теорема 9 (Состоятельные оценки ковариационной матрицы)** *Предположим, что A1–A7 выполнены. Тогда*

$$\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}^{-1} - \mathring{A}^{-1}\mathring{B}\mathring{A}^{-1} \xrightarrow{P} 0,$$

где  $\hat{A}_{\mu\nu} = \nabla_\mu^\top \hat{S}_\nu$  и  $\hat{B}_{\mu\nu} = \sum_{t=1}^T \hat{s}_\mu^t (\hat{s}_\nu^t)^\top / T$ .

**Доказательство.** Состоятельность  $\hat{A}$  как оценки  $\mathring{A}$  следует из доказательства теоремы 8.24 в White (1994), в то время как состоятельность  $\hat{B}$  для  $\mathring{B}$  следует из доказательства теоремы 8.26. Результат следует из теоремы Манна–Вальда. ■

## Список литературы

- Aas, K., C. Czado, A. Frigressi & H. Bakken (2009). Pair-copula constructions of multiple dependence. *Insurance: Mathematics and Economics* 44, 182–198.
- Bedford, T. & R. M. Cooke (2002). Vines – a new graphical model for dependent random variables. *Annals of Statistics* 30, 1031–1068.
- Diebold, F.X., T.A. Gunther, & A.S. Tay (1998). Evaluating density forecasts with applications to financial risk management. *International Economic Review* 39, 863–883.
- Fernandez, C. & M.F.J. Steel (1998). On Bayesian modelling of fat tails and skewness. *Journal of the American Statistical Association* 93, 359–371.
- Glosten, L.R., R. Jagannathan & D.E. Runkle (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of Finance* 48, 1779–1801.
- Griebeler, M.C. (2010). Models for forecasting exchange rate volatility: a comparison between developed and emerging countries. Working Paper, IMPA.
- Hsieh, D.A. (1989). Modeling heteroskedasticity in daily foreign-exchange rates. *Journal of Business & Economic Statistics* 7, 307–317.
- Joe, H. (1996). Families of  $m$ -variate distributions given margins and  $m(m-1)/2$  bivariate dependence parameters. Глава в *Distributions with Fixed Margins and Related Topics* под редакцией L. Rüschendorf, B. Schweizer & M.D. Taylor.
- Jondeau, E. & M. Rockinger (2006). The copula-GARCH model of conditional dependencies: an international stock market application. *Journal of International Money and Finance* 25, 827–853.
- Longmore, R. & W. Robinson (2004). Modelling and forecasting exchange rate dynamics in Jamaica: an application of asymmetric volatility models. Working Paper WP2004/03, Bank of Jamaica.
- Patton, A.J. (2002). *Applications of Copula Theory in Financial Econometrics*. PhD Thesis, University of California–San Diego.
- Patton, A.J. (2004). On the out-of-sample importance of skewness and asymmetric dependence for asset allocation. *Journal of Financial Econometrics* 2, 130–168.
- Patton, A.J. (2006). Modelling asymmetric exchange rate dependence. *International Economic Review* 47, 527–526.
- Rodriguez, J.C. (2007). Measuring financial contagion: A copula approach. *Journal of Empirical Finance* 14, 401–423.
- Sandoval, J. (2006). Do asymmetric GARCH models fit better exchange rate volatilities on emerging markets? Working Paper, Universidad Externado de Colombia. *Odeon* 3, 99–116.
- Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à  $n$  dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris* 8, 229–231.
- Trivedi, P.K. & D.M. Zimmer (2005). Copula modeling: an introduction for practitioners. *Foundations and Trends in Econometrics* 1, 1–111.

- Tse, Y.K. (1998). The conditional heteroskedasticity of the yen-dollar exchange rate. *Journal of Applied Econometrics* 13, 49–55.
- Tse, Y.K. & A.K.C. Tsui (1998). A multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with time-varying correlations. *Journal of Business & Economic Statistics* 20, 351–362.
- White, H. (1994). *Estimation, Inference and Specification Analysis*. Cambridge University Press.

## Time varying vine copulas for multivariate returns

Oleg Groshev

*Barclays Capital, Moscow, Russia*

We analyze the multivariate distribution of financial returns using time varying conditional vine copulas. We present the d-Stage Maximum Likelihood (dSML) estimator which is shown to be not only consistent and asymptotically normal, but also more computationally attractive than the standard ML or Patton's 2SML. Using dSML, we fit vine copulas to returns of a portfolio on emerging market currencies.

*Keywords: multidimensional time series, vine copulas, dSML estimator, computational efficiency*

*JEL Classification: C13, C58, G15*

