

квантиль

*международный эконометрический журнал
на русском языке*

**№13
май 2015 г.**

СОДЕРЖАНИЕ ВЫПУСКА

От редактора. Благодарность рецензентам 1

Эконометрический ликбез: волатильность

Кальниня Илзе, Сизова Наталья. Оценивание мер волатильности на
данных высокой частотности 3

Статьи: эконометрическая теория

Ожегов Евгений. Идентификация в классе непараметрических
моделей систем одновременных уравнений с выборочной
селективностью 15

Статьи: макроэконометрика

Погосян Карен. Альтернативные модели прогнозирования основных
макроэкономических показателей в Армении 25

Безбородова Александра, Михалёнок Юрий. Анализ
трансмиссионного механизма монетарной политики Республики
Беларусь: байесовский подход 41

Отчёт о конференции

Международная конференция «Современный эконометрический
инструментарий и приложения» 63

Квантиль

№13, май 2015 г.

ISSN 2309-3013

Сайт в Интернете: <http://quantile.ru>

Адрес электронной почты: quantile@quantile.ru

Доступ к журналу бесплатный и неограниченный

РЕДАКТОР

Станислав Анатольев

Российская Экономическая Школа (Москва, Россия)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Виктория Зинде-Уолш

Университет МакГилл (Монреаль, Канада)

Рустам Ибрагимов

Имперский колледж (Лондон, Великобритания)

Анна Микушева

Массачусетский технологический институт (Кэмбридж, США)

Алексей Онацкий

Кэмбриджский университет (Кэмбридж, Великобритания)

Александр Цыплаков

Новосибирский государственный университет (Новосибирск, Россия)

Виктор Черножуков

Массачусетский технологический институт (Кэмбридж, США)

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Рукописи для публикации в разделе «Статьи» принимаются в электронном виде по адресу submit@quantile.ru. Работы могут принадлежать любой прикладной сфере экономической науки. Главным требованием является интенсивное использование адекватных эконометрических методов. Рукопись должна быть написана на русском (для русскоязычных авторов) или на английском (для остальных авторов) языке в формате *Microsoft Word* или (предпочтительнее) *LaTeX*, и по объему не превышать 30 страниц формата А4 с двойным междустрочным интервалом. Работы подвергаются контролю качества членами редакционного совета и независимыми референтами. Перспективная работа может быть при необходимости возвращена автору на доработку. Редакция также приглашает к сотрудничеству экспертов по эконометрике, готовых внести вклад в методологические рубрики журнала.

При публикации статьи или методологического эссе в журнале «Квантиль» передача авторских прав не происходит ни полностью, ни частично.

Уважаемые читатели!

Редакционный совет благодарит нижеперечисленных экономистов, принявших наряду с редактором участие в рецензировании поступивших в «*Квантиль*» статей в последние пять лет:

Катерина Борнукова (Белорусский экономический исследовательско-образовательный центр)

Алексей Девятов (Банк Уралсиб)

Ирина Денисова (Российская экономическая школа)

Григорий Косенок (Российская экономическая школа)

Дмитрий Макаров (Российская экономическая школа)

Анна Микушева (Массачусетский технологический институт)

Александр Муравьев (ВШЭ в Санкт-Петербурге и Институт экономики труда)

Сергей Степанов (Высшая школа экономики)

Илья Стребулаев (Школа бизнеса Стэнфордского университета)

Константин Стырин (Российская экономическая школа)

Станислав Храпов (Российская экономическая школа)

Александр Цыплаков (Новосибирский государственный университет)

Валерий Черноокий (Российская экономическая школа)

Редактор и редакционный совет.

Эконометрический ликбез: волатильность

Оценивание мер волатильности на данных высокой частотности*

Илзе Кальниня[†]

Университет Монреаля, Монреаль, Канада

Наталья Сизова[‡]

Университет Райса, Хьюстон, США

Благодаря всё большей доступности данных высокой частотности, например, внутривидневных данных, возникло новое направление в измерении волатильности. Новые методы включают в себя непараметрическое оценивание волатильности с построением её прогнозов, ковариационных матриц, мгновенной волатильности, а также части волатильности, связанной со скачками. Настоящее эссе представляет собой обзор методов измерения волатильности, в том числе для данных ультравысокой частотности с микроструктурными искажениями. Включено также обсуждение проблем, возникающих при оценивании мер волатильности на несинхронизированных данных.

1 Введение: после GARCH

Bollerslev (1986) в своей знаменитой статье ввел в обращение модель GARCH для оценивания и прогнозирования волатильности временных рядов в экономике. Особенно частое применение модели GARCH можно встретить в финансовой литературе по управлению рисками и оптимизации инвестиций. Тем не менее, именно для финансовых данных времена GARCH как главного инструмента оценивания волатильности, возможно, уходят в прошлое.¹ Причина заключается во всё большей доступности внутривидневных данных, то есть данных в течение биржевого дня. Оценка GARCH волатильности в значительной мере определяется прошлой информацией и потому реагирует на изменения с запазданием. Новые методы, разработанные специально для работы с внутривидневыми данными, позволяют синхронизировать оценки волатильности с изменениями в самой волатильности.

Для простоты изложения в настоящем эссе мы будем предполагать, что наблюдения являются ценами на акцию некоторой компании. Однако методы, предложенные здесь, применимы для любых временных данных с динамикой семимартингала, см. определение в Protter (1992).

Основная часть данного эссе (раздел 2) определяет основные меры волатильности на данных высокой частотности (5–15 минут). Разделы 3 и 4 касаются проблем определения мер волатильности на данных с ультравысокой частотностью, таких как рыночный микроструктурный шум и несинхронность наблюдений. Раздел 5 посвящён построению прогнозов волатильности на базе введённых мер волатильности.

*Цитировать как: Кальниня, Илзе & Наталья Сизова (2015) «Оценивание волатильности на данных высокой частотности», Квантиль, №13, стр. 3–14. Citation: Kalnina, Ilze & Natalia Sizova (2015) “Estimation of volatility measures using high frequency data,” *Quantile*, No.13, pp. 3–14.

[†]Адрес: Department of Economics, Université de Montréal, 3150 Jean-Brillant, Montréal, Québec, H3T 1N8. Электронная почта: ilze.kalnina@umontreal.ca

[‡]Адрес: Department of Economics, Rice University, Baker Hall, room 253, Houston, TX 77251. Электронная почта: natalia.sizova@rice.edu

¹GARCH по-прежнему остается важным инструментом для моделирования динамики цен.

2 Меры волатильности на данных высокой частотности

Допустим, наша цель — определить волатильность логарифма цены на акцию s_τ в течение торгового дня $\tau \in [t, t+1]$. Записываем текущие цены в течение дня на равных промежутках: $s_t, s_{t+h}, s_{t+2h}, \dots, s_{t+1}$, где $h = 1/N$, и N является числом наблюдений за день. Например, $N = 78$ для индекса NYSE (Нью-Йоркской фондовой биржи) с 6,5-часовым торговым днем, если данные считываются каждые 5 минут. Для получения асимптотических результатов предположим, что $N \rightarrow \infty$. То есть, нам понадобится модель для $\{s_{t+\frac{i}{N}}\}_{i=0}^N$ при любом большом числе N , то есть модель в непрерывном времени.

Основополагающим теоретическим требованием к динамике цен на акции является отсутствие возможности арбитража — наличие торговой стратегии, приносящей дополнительную прибыль без дополнительного риска. Это правило накладывает ограничение на модель для s_τ (Fundamental Theorem of Asset Pricing). Например, в классе моделей с непрерывной динамикой существует всего одна возможная модель для s_τ , модель диффузии:

$$ds_\tau = \mu_\tau d\tau + \sigma_\tau dB_\tau, \quad (1)$$

где процесс B_τ является стандартным Броуновским движением,² а процессы μ_τ и σ_τ любыми càdlàg (непрерывными справа, конечными слева) процессами. В результате, в любой момент τ условная модель для $s_{\tau+\Delta\tau}$, $\Delta\tau \approx 0$ примерно соответствует нормальному распределению $N(s_\tau + \mu_\tau \Delta\tau, \sigma_\tau^2 \Delta\tau)$. То есть, σ_τ определяет мгновенную волатильность процесса s_τ и поэтому называется либо мгновенной (instantaneous), либо точечной (spot) волатильностью.

Дневная волатильность из GARCH модели в наиболее общей интерпретации является условной дисперсией $\mathbb{V}_t(s_{t+1} - s_t)$, то есть с точки зрения ожидания по состоянию на предыдущий день.³ С внутривнедневными данными аналогичная дневная волатильность будет определяться как $IV_{t,t+1} = \int_{\tau=t}^{t+1} \sigma_\tau^2 d\tau$, **интегральная волатильность**, и мы сможем оценить непосредственно $IV_{t,t+1}$, а не условный прогноз $\mathbb{E}_t IV_{t,t+1}$. Чтобы интуитивно понять важность этого результата, предположим, что процессы μ_τ и σ_τ остаются постоянными в течение дня, то есть $\sigma_\tau = \sigma_t, \tau \in [t, t+1)$. Из модели GARCH мы получаем оценку прогноза $\mathbb{E}_{t-1} \sigma_t^2$.⁴ Из внутривнедневных данных мы получаем оценку самой σ_t^2 . Мы опишем метод оценивания $IV_{t,t+1}$ на примере модели (1), а затем обсудим более широкую применимость этого результата.

Разделим день t на N равных промежутков ($n = 1, \dots, N$) с соответствующими доходностями на акцию $y_n = s_{t+nh} - s_{t+(n-1)h}$ и волатильностями $iv_n = IV_{t+(n-1)h, t+nh}$. Так как

$$s_{t+nh} \sim N(s_{t+(n-1)h} + \mu_{t+(n-1)h} h, \sigma_{t+(n-1)h}^2 h),$$

то

$$y_n^2 = \mu_{t+(n-1)h}^2 h^2 + 2h\mu_{t+(n-1)h}\sigma_{t+(n-1)h}u_{t+nh}\sqrt{h} + h\sigma_{t+(n-1)h}^2 u_{t+nh}^2,$$

где u_{t+nh} распределена примерно как стандартно-нормальная величина $N(0, 1)$ независимо от прошлых наблюдений σ_τ и s_τ для всех $\tau \leq t + (n-1)h$. Поэтому $u_{t+nh}\sqrt{h} \approx B'_{t+nh} - B'_{t+(n-1)h}$, где B'_t — некоторый стандартный Броуновский процесс.

Определим **реализованную волатильность** как сумму квадратов изменений цены акции:

$$RV_{t,t+1} = \sum_{n=1}^N (s_{t+nh} - s_{t+(n-1)h})^2 = \sum_{n=1}^N y_n^2, \quad (2)$$

²Стандартное Броуновское движение определяется как непрерывный процесс с приращениями $B_{t_2} - B_{t_1}$, распределенными нормально $N(0, t_2 - t_1)$ и независимо от прошлых наблюдений $B_\tau, \tau \leq t_1$.

³Для иллюстрации приведем простую версию модели GARCH: $s_{t+1} - s_t = \tilde{\mu} + \sigma_t z_{t+1}$, $\sigma_t^2 = \tilde{\omega} + \tilde{\alpha} \sigma_{t-1}^2 + \tilde{\beta} (s_t - s_{t-1})^2$, где z_{t+1} является переменной с нулевым условным ожиданием $\mathbb{E}_t z_{t+1} = 0$ и единичной условной дисперсией $\mathbb{V}_t z_{t+1} = 1$. То есть, $\mathbb{V}_t (s_{t+1} - s_t) = \sigma_t^2$.

⁴Исключение составляет случай, когда $\mathbb{E}_{t-1} \sigma_t^2$ совпадает с σ_t^2 .

и покажем, что $RV_{t,t+1} \xrightarrow{p} IV_{t,t+1}$, то есть $RV_{t,t+1}$ является состоятельной оценкой дневной волатильности цен. Разложим:

$$\begin{aligned} RV_{t,t+1} - IV_{t,t+1} &= \sum_{n=1}^N (y_n^2 - iv_n) \approx \left(\sum_{n=1}^N \mu_{t+(n-1)h}^2 \right) h \\ &\quad + 2 \left(\sum_{n=1}^N \mu_{t+(n-1)h} \sigma_{t+(n-1)h} (B'_{t+nh} - B'_{t+(n-1)h}) \right) h \\ &\quad + \left(\sum_{n=1}^N \sigma_{t+(n-1)h}^2 \sqrt{h} (u_{t+nh}^2 - 1) \right) \sqrt{h} + \sum_{n=1}^N (\sigma_{t+(n-1)h}^2 h - iv_n). \end{aligned}$$

Суммы

$$\sum_{n=1}^N \mu_{t+(n-1)h}^2 h \xrightarrow{p} \int_{\tau=t}^{t+1} \mu_{\tau-}^2 d\tau$$

и

$$\sum_{n=1}^N \mu_{t+(n-1)h} \sigma_{t+(n-1)h} (B'_{t+nh} - B'_{t+(n-1)h}) \xrightarrow{p} \int_{\tau=t}^{t+1} \mu_{\tau-} \sigma_{\tau-} dB'_\tau$$

сходятся, поэтому при умножении на $h = 1/N \rightarrow 0$ они стремятся к нулю. Третья сумма $\sum_{n=1}^N \sigma_{t+(n-1)h}^2 \sqrt{h} (u_{t+nh}^2 - 1)$ сходится по распределению⁵, поэтому при умножении на \sqrt{h} тоже стремится к нулю. Последний член равен $\sum_{n=1}^N (\sigma_{t+(n-1)h}^2 h - iv_n) = \sum_{n=1}^N \int_{\tau=0}^h (\sigma_{t+(n-1)h}^2 - \sigma_{t+(n-1)h+\tau}^2) d\tau$. Из непрерывности слева и конечности справа на интервале $[t, t+1]$ процесса σ_τ^2 мы получаем, что $|\sum_{n=1}^N \int_{\tau=0}^h (\sigma_{t+(n-1)h}^2 - \sigma_{t+(n-1)h+\tau}^2) d\tau| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Также были предложены другие меры волатильности, главным образом потому, что непрерывная модель (1) не совсем точно описывает динамику цен акций. Например, если динамика цены на акцию разрывна, то есть подвержена резким переходам (разрывам, скачкам), то мы можем отдельно оценить волатильность непрерывных изменений и волатильность скачков. Почему такое разделение полезно? Например, при прогнозировании волатильности компоненты могут нести разную информацию о будущей динамике. Волатильность непрерывной части мало изменяется от одного дня к другому, при этом волатильность от резкого перехода цен может и не отразиться на волатильности следующего дня или, наоборот, может дать толчок к периоду с более высокой волатильностью. Поэтому определяется ещё одна мера волатильности — **вариация второй степени**:

$$BV_{t,t+1} = \frac{\pi}{2} \frac{N}{N-1} \sum_{n=2}^N |s_{t+nh} - s_{t+(n-1)h}| |s_{t+(n-1)h} - s_{t+(n-2)h}|. \quad (3)$$

При разрыве в динамике цены $RV_{t,t+1}$, как и прежде, описывает полную волатильность цен, а $BV_{t,t+1}$ только непрерывную ее часть. Например, если в дополнение к динамике (1) произошел скачок в ценах величиной Δ_s , то $BV_{t,t+1} \xrightarrow{p} \int_{\tau=t}^{t+1} \sigma_\tau^2 d\tau$ и $RV_{t,t+1} \xrightarrow{p} \int_{\tau=t}^{t+1} \sigma_\tau^2 d\tau +$

⁵Заметим, что если $\tilde{B}_h(\tau)$ — процесс с приращениями $\tilde{B}_h(t+nh) - \tilde{B}_h(t+nh-h) = \sqrt{h}\tilde{u}_n$, где величины \tilde{u}_n , $n = 1, \dots, 1/h$ независимо одинаково распределены, $\mathbb{E}u_n = 0$ и $\mathbb{E}u_n^2 = 1$, то $\tilde{B}_h(\tau)$ сходится по распределению к стандартному Броуновскому движению: $\tilde{B}_h(\tau) \xrightarrow{d} \tilde{B}(\tau)$. В нашем случае $\tilde{u}_n = u_{t+nh}^2 - 1$, поэтому $\sum_{n=1}^N \sigma_{t+(n-1)h}^2 \sqrt{h} (u_{t+nh}^2 - 1) \xrightarrow{d} \int_{\tau=0}^1 \sigma_{t-\tau}^2 d\tilde{B}(\tau)$.

Δ_s^2 . Интуитивно, если скачок Δ_s произошел в момент τ_s , то $(s_{\tau_s} - s_{\tau_s-h})^2 \rightarrow \Delta_s^2$, но $|s_{\tau_s} - s_{\tau_s-h}| |s_{\tau_s-h} - s_{\tau_s-2h}| \rightarrow 0$.⁶

Разделение волатильности на разрывную и непрерывную части может, например, осуществляться следующим способом (см. Andersen, Bollerslev & Huang, 2011). Во-первых, определяются дни, в течение которых произошел разрыв в динамике цен, и вводится соответствующий индикатор $J_{t,t+1}$ для каждого интервала $(t, t+1]$. Если цены наблюдались бы непрерывно, а не только в момент совершения сделок, то разрывы ($J_{t,t+1}$) тоже бы наблюдались. В реальных же условиях используются оценки. Например, следующая статистика основана на свойстве, что $RV_{t,t+1} \approx BV_{t,t+1}$ в отсутствие разрывов:

$$Z_{t,t+1} = \frac{1 - BV_{t,t+1}/RV_{t,t+1}}{\sqrt{\frac{1}{N} \left((\pi/2)^2 + \pi - 5 \right) \max \left(1, \frac{TQ_{t,t+1}}{BV_{t,t+1}} \right)}},$$

$$TQ_{t,t+1} = K_{tq} \frac{N^2}{N-6} \sum_{n=5}^N |y_{n-4}|^{4/3} |y_{n-2}|^{4/3} |y_n|^{4/3},$$

$$\hat{J}_{t,t+1} = \begin{cases} 1 & \text{если } Z_{t,t+1} > \bar{Z} \\ 0 & \text{если } Z_{t,t+1} \leq \bar{Z} \end{cases},$$

где константа K_{tq} задается через моменты стандартной нормальной величины:

$$K_{tq} = \left(\mathbb{E}|N(0,1)|^{4/3} \right)^{-3} \approx 1,75.$$

Распределение Z_t сходится к стандартно-нормальному при $N \rightarrow \infty$ и $BV_{t,t+1}/RV_{t,t+1} \rightarrow 1$. Поэтому при пороговом значении $\bar{Z} = 2,326$ погрешность метода составляет примерно 1%.

Во-вторых, волатильность разделяется на две части: **непрерывную** $CV_{t,t+1}$ и **волатильность разрывов** $JV_{t,t+1}$:

$$RV_{t,t+1} = CV_{t,t+1} + JV_{t,t+1},$$

где

$$CV_{t,t+1} = \begin{cases} RV_{t,t+1} & \text{если } \hat{J}_{t,t+1} = 0, \\ BV_{t,t+1} & \text{если } \hat{J}_{t,t+1} = 1, \end{cases} \quad JV_{t,t+1} = \begin{cases} 0 & \text{если } \hat{J}_{t,t+1} = 0, \\ RV_{t,t+1} - BV_{t,t+1} & \text{если } \hat{J}_{t,t+1} = 1. \end{cases}$$

Далее в моделях волатильности $CV_{t,t+1}$ и $JV_{t,t+1}$ могут использоваться отдельно.

Меры, аналогичные $RV_{t,t+1}$, используются также в многомерных приложениях. Например, при оптимизации инвестиций необходимо рассчитать матрицу ковариаций $V_{t,t+1}$ для нескольких акций, $p_t = (s_{1,t}, \dots, s_{M,t})'$. В этом случае применимы похожие результаты, например, следующая оценка:

$$\hat{V}_{t,t+1} = \sum_{n=1}^N (p_{t+nh} - p_{t+(n-1)h})(p_{t+nh} - p_{t+(n-1)h})'. \quad (4)$$

Этим методом мы можем определить реализованные корреляции за каждый день. Но важно отметить ограничения этого метода в многомерных моделях: результаты с условием $N \rightarrow \infty$

⁶Заметим, что свойство $|s_{\tau_s} - s_{\tau_s-h}| |s_{\tau_s-h} - s_{\tau_s-2h}| \rightarrow 0$ выполняется только при $N \rightarrow \infty$. В малых выборках величина $|s_{\tau_s} - s_{\tau_s-h}| |s_{\tau_s-h} - s_{\tau_s-2h}|$ влияет на $BV_{t,t+1}$. Для уточнения оценки волатильности без учёта скачков были предложены следующие методы: усечённая $RV_{t,t+1}$ (Mancini, 2009), усечённая $BV_{t,t+1}$ (Corsi, Pirino и Reno, 2010), minRV и medRV (Andersen, Dobrev & Schaumburg, 2012) и квантильная $RV_{t,t+1}$ (Christensen, Oomen & Podolskij, 2010).

позволяют дать точную оценку корреляции $s_{j,t_2} - s_{j,t_1}$ и $s_{i,t_2} - s_{i,t_1}$, $i \neq j$, $t_1 < t_2$, но не, например, реакции $s_{j,t_2} - s_{j,t_1}$ на $s_{i,t_1} - s_{i,t_0}$, $i \neq j$, $t_0 < t_1 < t_2$. То есть, асимптотика с $N \rightarrow \infty$ позволяет оценить только взаимоотношения между одновременными изменениями.

Наконец, в случае, если вместо интегральной волатильности $IV_{t,t+1}$ нам интересно измерение волатильности в конкретный момент времени, то мгновенную волатильность σ_t^2 можно оценить с помощью **локальной реализованной волатильности**. Локальная реализованная волатильность определяется как реализованная волатильность на «малом» интервале времени $[t, t + k_N h]$, поделенная на длину этого интервала:

$$\hat{\sigma}_\tau^2 = \frac{1}{k_N h} \sum_{n=1}^{k_N} (s_{t+nh} - s_{t+(n-1)h})^2,$$

$\tau \in (t, t + k_N h)$, где k_N является числом наблюдений в интервале $[t, t + k_N h]$. При условиях $k_N \rightarrow \infty$ и $k_N h \rightarrow \infty$, оценка $\hat{\sigma}_\tau^2$ сходится к σ_τ^2 . В случае присутствия разрывов в динамике цен s_t локальная реализованная волатильность заменяется на другие меры волатильности, например, локальную вариацию второй степени $BV_{t,t+k_N h}$ или усеченную реализованную волатильность, см. Lee & Mykland (2008), Jacod & Rosenbaum (2012). Асимптотические свойства локальных мер волатильностей рассмотрены в Kristensen (2010).

3 Оценивание волатильности на данных с ультравысокой частотностью. Микроструктурный шум

Заметим, что меры волатильности из предыдущей главы применимы при условии отсутствия арбитража⁷. Роль этого условия можно понять так: при отсутствии арбитража, внутрисуточная волатильность малых изменений в доходностях соответствует дисперсии доходности от начала до закрытия торгов, то есть волатильности $s_{t+1} - s_t$. Типичный случай, когда условие на арбитраж нарушается, происходит из-за ограничений на свободное движение цен — например, когда котировки дискретны, то есть акции не котируются в долях денежной единицы, или существует разница между ценами продавца и покупателя (bid-ask spread), и так далее. Все подобные причины отклонения цены от эффективной⁸ могут привести к временному наличию арбитража. Поэтому, при самых малых h (то есть, для данных с ультравысокой частотностью, например при $h = 1$ сек) в определении мер волатильности мы должны учитывать **микроструктурный шум**, отклонение наблюдаемой цены от эффективной. Как мы покажем далее, чем меньше h , тем большая часть $RV_{t,t+1}$ происходит от микроструктурного шума, а не от истинной динамики доходностей.

Zhou (1996) предложил моделировать данные ультравысокой частотности как диффузию (1) плюс микроструктурный шум. Снова обозначим логарифм наблюдаемой цены как s_t , а логарифм эффективной цены теперь обозначим как s_t^* . То есть, s_t^* есть цена без микроструктурных искажений. В модели Zhou (1996)

$$s_t = s_t^* + e_t, \tag{5}$$

где $\mathbb{E}[e_t] = 0$. То есть, микроструктурный шум e_t представлен аддитивной ошибкой с нулевым математическим ожиданием.

Существуют эмпирические подтверждения модели Zhou (1996) на финансовых данных с самой высокой частотностью. В динамике цен присутствуют характеристики, не соответствующие модели (1), например, присутствие заметных автокорреляций в доходностях. Если доходности определяются моделью (1), то на очень коротких промежутках времени эти

⁷В математических терминах процесс цены должен быть семимартингалом.

⁸Эффективная цена — это истинная цена акции с учетом будущих доходностей и рисков.

доходности практически непрогнозируемы, так как $s_{t+h} - s_t \approx \int_{\tau=t}^{t+h} \sigma_\tau dB_\tau$ при $h \approx 0$ и $\mathbb{E}_t \int_{\tau=t}^{t+h} \sigma_\tau dB_\tau = 0$. На практике, действительно, оценки автокорреляций для $s_{t+h} - s_t$ при $h = 5$ мин незначительны. Однако при увеличении частоты наблюдений, например, на так называемых **потиковых данных** (tick data), в доходностях на акции появляется существенная отрицательная автокорреляция.

Модель Zhou (1996) может воспроизвести эти наблюдаемые свойства доходностей. Даже если e_t в (5) независимо распределены, доходности в этой модели будут автокоррелированы:

$$y_n = s_{t+nh} - s_{t+(n-1)h} = \underbrace{s_{t+nh}^* - s_{t+(n-1)h}^*}_{\text{настоящая доходность}} + \underbrace{e_{t+nh} - e_{t+(n-1)h}}_{\text{шум}}. \quad (6)$$

Как уже было показано, доходности $y_n^* = s_{t+nh}^* - s_{t+(n-1)h}^*$ практически независимы во времени. Для микроструктурной части, $\mathbb{C}(e_{t+nh} - e_{t+(n-1)h}, e_{t+(n-1)h} - e_{t+(n-2)h}) = -\mathbb{V}(e_{t+(n-1)h}) < 0$. То есть модель воспроизводит наблюдаемые отрицательные корреляции на высокочастотных данных. Одновременно модель воспроизводит отсутствие автокорреляций на более длинных интервалах. Сравним посекундные наблюдения ($h = 1$ сек) с 5-минутными ($h = 300$ сек). Во втором случае «истинная» волатильность доходности примерно в 300 раз больше:

$$\frac{\int_t^{t+300} \mathbb{E}(\sigma_\tau^2) d\tau}{\int_t^{t+1} \mathbb{E}(\sigma_\tau^2) d\tau} = 300.$$

В то же время вклад микроструктурного шума в волатильность y_n остается таким же:

$$\frac{\mathbb{V}(e_{t+n} - e_{t+(n-1)})}{\mathbb{V}(e_{t+300n} - e_{t+300(n-1)})} = \frac{\mathbb{V}(e_{t+n}) + \mathbb{V}(e_{t+(n-1)})}{\mathbb{V}(e_{t+300n}) + \mathbb{V}(e_{t+300(n-1)})} = 1.$$

То есть, негативная автокорреляция остается, но ее величина становится несущественной, и модель (1) становится хорошим приближением на практике.

Ещё одно свойство наблюдений $RV_{t,t+1}$ не согласуется с моделью (1), но хорошо объясняется моделью с шумом (5). Допустим, доходности следуют динамике диффузии (1), тогда для любой частоты наблюдений (для любой h) математическое ожидание $RV_{t,t+1}$ остается постоянным. Для доказательства обозначим реализованную волатильность, рассчитанную на основе каждого m -го наблюдения, как $RV_{t,t+1}^{(m)}$ (то есть, используются N/m наблюдений из N). Заметим, что $RV_{t,t+1}^{(m)}$ является несмещённой оценкой интегральной волатильности $IV_{t,t+1}$, если $e_t = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(RV_{t,t+1}^{(m)}\right) &= \mathbb{E} \sum_{n=1}^{N/m} (s_{t+nmh} - s_{t+(n-1)mh})^2 \\ &\approx \sum_{n=1}^{N/m} \int_{t+(n-1)mh}^{t+nmh} \mathbb{E}(\sigma_\tau^2) d\tau \\ &= \int_t^{t+1} \mathbb{E}(\sigma_\tau^2) d\tau \\ &= \mathbb{E}(IV_{t,t+1}) \end{aligned}$$

для любого выбранного m , то есть для любой частоты наблюдений. Соблюдается ли это правило на практике, можно проверить с помощью графика волатильности (volatility signature plot) методом, предложенным в Andersen, Bollerslev, Diebold & Labys (2000). График волатильности отображает $RV_{t,t+1}^{(m)}$ как функцию от m , иногда усредненную по дням или по акциям. Так как $\mathbb{E}(RV_{t,t+1}^{(m)})$ не зависит от m в модели диффузии (1), такой график должен быть примерно горизонтальным. Однако мы наблюдаем, что графики волатильности

для ликвидных акций горизонтальны при $mh > 5 \div 15$ мин, но быстро растут при увеличении частоты наблюдений. Такое поведение графика волатильности соответствует модели с аддитивным микроструктурным шумом (5). Для простоты изложения, предположим, что микроструктурные эффекты не автокоррелированы, то есть $\mathbb{C}(e_t, e_s) = 0$ для всех $t \neq s$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(RV_{t,t+1}^{(m)} \right) &= \mathbb{E} \sum_{n=1}^{N/m} (s_{t+nmh} - s_{t+(n-1)mh})^2 \\ &\approx \mathbb{E} (IV_{t,t+1}) + \mathbb{E} \sum_{n=1}^{N/m} (e_{t+nmh} - e_{t+(n-1)mh})^2 \\ &= \mathbb{E} (IV_{t,t+1}) + 2 \frac{N}{m} \mathbb{V}(e_t). \end{aligned}$$

Математическое ожидание $RV_{t,t+1}^{(m)}$ увеличивается с частотой наблюдений. То есть смещение в оценке $RV_{t,t+1}^{(m)}$ увеличивается с N/m . Из-за этого смещения было предложено не использовать для оценивания все наблюдения, а останавливаться на 5–15-минутных данных. С такими данными смещение незначительно, но точность оценки ухудшается по сравнению с использованием всех данных. Альтернативный подход к выбору h заключается в нахождении частоты наблюдений с оптимальным соотношением смещения и точности.

Далее в этой главе мы обсудим три оценки волатильности, наиболее часто применяемые на данных с ультра-высокой частотностью: двухшкальную реализованную волатильность (two-scale realized volatility, TSRV) из Ait-Sahalia, Mykland & Zhang (2005), реализованные ядерные (realized kernels), см. Barndorff-Nielsen, Hansen, Lunde & Shephard (2008), и предварительно усредненные (pre-averaging) оценки, см. Jacod, Li, Mykland, Podolskij & Vetter (2009). Ради простоты изложения вновь предположим, что микроструктурные эффекты не автокоррелированы.

Вернёмся к свойствам оценки $RV_{t,t+1}$ при наличии микроструктурных искажений. Допустим, величина микроструктурных искажений e_t не зависит от истинных цен s_t^* . Математическое ожидание $RV_{t,t+1}$ в модели (5) с независимыми e_t

$$\mathbb{E} (RV_{t,t+1}) = \mathbb{E} \sum_{n=1}^N (y_n^*)^2 + \mathbb{E} \sum_{n=1}^N (e_{t+nh} - e_{t+(n-1)h})^2 \approx \int_t^{t+1} \mathbb{E} (\sigma_\tau^2) d\tau + 2N \mathbb{E} (e^2)$$

включает в себя смещение $2N \mathbb{E} (e^2)$. Для того, чтобы избавиться от смещения, Zhou (1996) предложил скорректировать $RV_{t,t+1}$ на первую реализованную автоковариацию:

$$\widehat{IV}_{t,t+1}^{Zhou} = RV_{t,t+1} + \sum_{n=1}^N (y_n y_{n-1} + y_{n+1} y_n),$$

так как $\mathbb{E} \sum_{n=1}^N (y_n y_{n-1} + y_{n+1} y_n) = - \left(\sum_{n=1}^N \mathbb{V}(e_{t+(n-1)h}) + \mathbb{V}(e_{t+nh}) \right) = -2N \mathbb{E} (e^2)$. Предложенная оценка несмещена, но тем не менее несостоятельна. Впоследствии Barndorff-Nielsen, Hansen, Lunde & Shephard (2008) ввели в оборот состоятельную реализованную ядерную оценку (realized kernel):

$$\widehat{IV}_{t,t+1}^{BNHLS} = RV_{t,t+1} + \sum_{l=1}^L k \left(\frac{l-1}{L} \right) (\gamma_l + \gamma_{-l}),$$

где $k(\cdot)$ — дважды непрерывно дифференцируемая весовая функция (ядро), $\gamma_l = \sum_{n=1}^N y_n y_{n-l}$ — реализованная автоковариация, и число автоковариаций $L \rightarrow \infty$ при $L/N \rightarrow 0$ и $N \rightarrow \infty$. Аналогичная оценка для матрицы ковариаций была предложена в Barndorff-Nielsen, Hansen,

Lunde & Shephard (2011). Оценка из Ikeda (2015) корректирует оценку на асимптотическое смещение.

Мы уже упомянули, что из-за смещения в $RV_{t,t+1}$ на данных с малым h часто практикуется использование только части данных. То есть, вместо $RV_{t,t+1}^{(1)}$ используется $RV_{t,t+1}^{(m)}$ с $m \gg 1$. Допустим, наши данные записаны посекундно, но мы используем только 5-минутные данные, то есть $m = 300$. Заметим, что в этом случае существует 300 способов выбора 5-минутных наблюдений: начиная с первой, второй и т.д. секунды. Поэтому можно получить более точную оценку усреднением:

$$RV_{t,t+1}^{(avg,m)} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left[\sum_{n=1}^{N/m} (s_{t+nmh+j} - s_{t+(n-1)mh+j})^2 \right]. \quad (7)$$

Оценка TSRV из Ait-Sahalia, Mykland & Zhang (2005) получается из усредненной оценки (7) вычитанием смещения. Смещение в $RV_{t,t+1}^{(avg,m)}$ примерно совпадает со смещением в $RV_{t,t+1}^{(m)}$, то есть $RV_{t,t+1}^{(avg,m)}$ превышает $IV_{t,t+1}$ в среднем на $2\frac{N}{m}\mathbb{E}(e^2)$:

$$\mathbb{E}\left(RV_{t,t+1}^{(avg,m)}\right) = \mathbb{E}(IV_{t,t+1}) + 2\frac{N}{m}\mathbb{E}(e^2). \quad (8)$$

Для оценивания смещения заметим, что реализованная волатильность $RV_{t,t+1}^{(1)}$ при очень малых h определяется практически целиком волатильностью микроструктурных искажений. Поэтому оценкой смещения может служить сама реализованная волатильность $RV_{t,t+1}^{(1)}$:

$$\widehat{\sigma}_e^2 \equiv \frac{RV_{t,t+1}^{(1)}}{2N} \sim \frac{IV_{t,t+1}}{2N} + \frac{\sum_{n=1}^N (e_{t+nh} - e_{t+(n-1)h})^2}{2N} \xrightarrow{p} \frac{1}{2}\mathbb{E}(e_{t+nh} - e_{t+(n-1)h})^2 = \mathbb{E}(e^2).$$

Корректируя на смещение, мы получаем оценку Ait-Sahalia, Mykland & Zhang (2005):

$$\widehat{IV}_{t,t+1}^{ZMA} = RV_{t,t+1}^{(avg,m)} - 2\frac{N}{m}\widehat{\sigma}_e^2 = RV_{t,t+1}^{(avg,m)} - \frac{1}{m}RV_{t,t+1}^{(1)}.$$

Ait-Sahalia, Mykland & Zhang (2005) показали, что $\widehat{IV}_{t,t+1}^{ZMA}$ сходится со скоростью $N^{1/6}$. Далее Zhang (2006) предложила метод улучшения TSRV-оценки со скоростью сходимости $N^{1/4}$. Ait-Sahalia, Mykland & Zhang (2011) обобщили TSRV-метод на случай автокорреляций в микроструктурном шуме, но при условиях постоянной волатильности шума и независимости шума и цен. Kalnina & Linton (2008) исследовали корректность метода $\widehat{IV}_{t,t+1}^{ZMA}$ при более общих условиях. Во-первых, Kalnina & Linton (2008) снизили требование к независимости шума и цен без изменений в самой TSRV-оценке. Во-вторых, они предложили изменения в TSRV-оценке в случае переменной волатильности шума.

Наконец, третья оценка $IV_{t,t+1}$ в присутствии микроструктурных искажений была предложена в Jacod, Li, Mykland, Podolskij & Vetter (2009). Она основана на предварительном усреднении (pre-averaging estimator). Допустим, для каждого m наблюдений мы находим средний логарифм цены

$$\bar{s}_t = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (s_{t+i}^* + e_{t+i}).$$

По классическому закону больших чисел, среднее шума $\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} e_{t+i}$ сходится к $\mathbb{E}(e) = 0$ при $m \rightarrow \infty$. Поэтому \bar{s}_t приближается к \bar{s}_t^* , но характеризуется большей волатильностью. Это свойство лежит в основе идеи построения оценки $IV_{t,t+1}$ на основе средних \bar{s}_t , рассчитанных на 5-минутных интервалах, а не самих цен. Так как \bar{s}_t более волатильна чем \bar{s}_t^* , то

получаемая оценка изначально смещена, однако смещение вычисляется как функция $\mathbb{V}(e_t)$. Стилизованная формула для оценки принимает форму

$$RV_{t,t+1}(\bar{s}) - \widehat{bias}.$$

Точная формула приведена в статьях Jacod, Li, Mykland, Podolskij & Vetter (2009) и Jacod & Protter (2012, глава 16), и включает не простые, а взвешенные средние значения \bar{s} . Заметим, что метод усреднения может быть применен практически к любой другой оценке волатильности в данном эссе и помогает убрать эффект микроструктурных искажений. Например, для вариации второй степени $BV_{t,t+1}$ аналогичная оценка была предложена в Podolskij & Vetter (2009). Оценка матрицы ковариаций с предварительным усреднением цен была разработана в Christensen, Kinnebrock & Podolskij (2010).

4 Оценивание волатильности на данных с переменной высокой частотностью

В предыдущих главах наблюдения, по конструкции, были распределены на равных промежутках времени ($h = 1/N$). Однако, например, потиковые данные по своей природе не равноудалены друг от друга, а зависят от скорости заключения сделок, то есть условий на рынке. Допустим, что наблюдения берутся через переменные промежутки времени v_1, v_2, \dots, v_n . Ранее предполагалось, что $v_1 = v_2 = \dots = v_n = h$, теперь же интервалы v_i могут изменяться. Интересно, что если v_i не зависят от процесса цен s_t , то все приведенные оценки волатильности определяются так же, как в случае с равноудаленными наблюдениями, см. Barndorff-Nielsen, Hansen, Lunde & Shephard (2008, глава 5.1). Случай, в котором интервалы v_i зависят от уровня цен s_t , намного сложнее. Известно, что в отсутствие микроструктурных искажений $RV_{t,t+1}$ продолжает быть состоятельной оценкой $IV_{t,t+1}$, см. Li, Mykland, Renault, Zhang & Zheng (2014), но не существует приемлемого метода для оценки соответствующих доверительных интервалов. Случай с v_i , зависящими от уровня цен s_t , и микроструктурным шумом в литературе не рассмотрен.

Наконец, что делать в случае, когда цены наблюдаются через переменные промежутки времени, а целью является построение оценки матрицы ковариаций для нескольких акций? В такой многомерной задаче неравномерность наблюдений приводит к дополнительной проблеме несинхронизированных наблюдений.

Для решения этой проблемы наблюдения сначала синхронизируются. С этой целью производится интерполяция между наблюдениями. Наиболее часто используемый метод синхронизации представлен в Barndorff-Nielsen, Hansen, Lunde & Shephard (2011) и известен как метод «времени обновления» (refresh time synchronization). Вначале строится общая сетка наблюдений. Затем цены всех акций интерполируются на эту общую сетку по методу ближайшего предыдущего наблюдения. Общая сетка наблюдений строится следующим образом. Для каждой акции j обозначим первый момент времени заключения сделки как $t_1^{(j)}$. Тогда первый элемент общей сетки $\tau_1 = \max(t_1^{(1)}, t_1^{(2)}, \dots)$ является первым моментом времени, к которому по всем акциям заключена хотя бы одна сделка. Вторым элементом сетки τ_2 является первым моментом времени, к которому по всем акциям заключена хотя бы одна новая сделка после τ_1 , и так далее. Преимущество этого метода заключается в том, что изначальная асинхронность наблюдений не нарушает асимптотических результатов при выполнении подходящих условий. Недостаток этого метода заключается в его неэффективности, так как значительная часть наблюдений, вне общей сетки, игнорируется. В отдельных приложениях были предложены более эффективные методы для несинхронных данных, см. Hayashi & Yoshida (2005) и Sheppard & Xiu (2012).

5 Применение двухшаговых методов при моделировании и прогнозировании волатильности

Возвращаясь к литературе по GARCH моделям, нужно отметить, что иногда интерес представляет именно прогноз волатильности, а не сама волатильность. В случае GARCH эти две величины совпадают. Однако это свойство является всего лишь ограничением модели GARCH: если волатильность оценивается с помощью методов, описанных в данном эссе, то необходим ещё один шаг – оценка модели для $\mathbb{E}_t RV_{t,t+1}$. В результате строится прогноз $RV_{t,t+1}$, что примерно совпадает с прогнозом (и это есть конечная цель) $IV_{t,t+1}$. Например, прогноз «волатильность не изменится» означает $\mathbb{E}_t RV_{t,t+1} = RV_{t-1,t}$.

Существует несколько моделей для $\mathbb{E}_t RV_{t,t+1}$, так же как существует несколько версий GARCH. Одна из самых простых и интуитивных – это HAR модель Corsi (2009):

$$\mathbb{E}_t RV_{t,t+1} = \gamma_0 + \gamma_1 RV_{t,t-1} + \gamma_2 RV_{t,t-5} + \gamma_3 RV_{t,t-22}.$$

То есть волатильность завтра зависит от волатильности сегодня, от волатильности за последнюю неделю (5 биржевых дней) и от волатильности за последний месяц (22 биржевых дня). Таким образом, мы принимаем во внимание многоуровневую временную структуру волатильности. HAR-модель оценивается любым методом для линейных моделей, например, методом наименьших квадратов. Заметим, что такой двухшаговый подход предполагает число наблюдений за день $N \rightarrow \infty$ для сходимости оценки волатильности и, одновременно, число дней в выборке $T \rightarrow \infty$ для сходимости оценок коэффициентов.

Другой удачный пример – модель ARFIMA (Andersen, Bollerslev, Diebold & Ebens 2001, Andersen, Bollerslev, Diebold & Labys 2001, 2003) – также учитывает многокомпонентную структуру волатильности. В ARFIMA модели динамика $RV_{t,t+1}$ представлена в следующей форме:

$$(1 - \rho_1 L - \dots - \rho_p L^p)(1 - L)^d RV_{t,t+1} = (1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q) u_t,$$

где L – лаговый оператор: $L^i RV_{t,t+1} = RV_{t-i,t+1-i}$, u_t – ошибка прогноза, и $0 < d < 1/2$.

В целом наличие $RV_{t,t+1}$ делает волатильность наблюдаемой. Поэтому любой метод для прогнозирования наблюдаемых данных может быть применен к волатильности. Andersen, Bollerslev & Huang (2011) используют в прогнозе разделение $RV_{t,t+1}$ на непрерывную волатильность и волатильность разрывов. HEAVY модель из Noureldin, Shephard & Sheppard (2012) включает одновременно элементы GARCH и двухшаговых методов с $RV_{t,t+1}$.

Список литературы

- Ait-Sahalia, Y., P.A. Mykland & L. Zhang (2005). A tale of two time scales: Determining integrated volatility with noisy high-frequency data. *Journal of American Statistical Association* 100, 1394–1411.
- Ait-Sahalia, Y., P.A. Mykland & L. Zhang (2011). Ultra high frequency volatility estimation with dependent microstructure noise. *Journal of Econometrics* 160, 190–203.
- Andersen, T., T. Bollerslev, F.X. Diebold & H. Ebens (2001). The distribution of realized stock return volatility. *Journal of Financial Economics* 61, 43–76.
- Andersen, T., T. Bollerslev, F.X. Diebold & P. Labys (2000). Great realizations. *Risk* 13, 105–108.
- Andersen, T., T. Bollerslev, F.X. Diebold & P. Labys (2001). The distribution of realized exchange rate volatility. *Journal of American Statistical Association* 96, 42–55.
- Andersen, T., T. Bollerslev, F.X. Diebold & P. Labys (2003). Modeling and forecasting realized volatility. *Econometrica* 71, 579–625.
- Andersen, T., T. Bollerslev & X. Huang (2011). A reduced form framework for modeling and forecasting jumps and volatility in speculative prices. *Journal of Econometrics* 160, 176–189.

- Andersen, T., D. Dobrev, & E. Schaumburg (2012). Jump-robust volatility estimation using nearest neighbor truncation. *Journal of Econometrics* 169, 75–93.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31, 307–327.
- Barndorff-Nielsen, O.E., P.R. Hansen, A. Lunde & N. Shephard (2008). Designing realized kernels to measure the ex post variation of equity prices in the presence of noise. *Econometrica* 76, 1481–1536.
- Barndorff-Nielsen, O.E., P.R. Hansen, A. Lunde & N. Shephard (2011). Multivariate realized kernels: Consistent positive semi-definite estimators of the covariation of equity prices with noise and non-synchronous trading. *Journal of Econometrics* 162, 149–169.
- Christensen, K., S. Kinnebrock & M. Podolskij (2010). Pre-averaging estimators of the ex-post covariance matrix in noisy diffusion models with non-synchronous data. *Journal of Econometrics* 159, 116–133.
- Christensen, K., R. Oomen & M. Podolskij (2010). Realised quantile-based estimation of the integrated variance. *Journal of Econometrics* 159, 74–98.
- Corsi, F. (2009). A simple approximate long-memory model of realized volatility. *Journal of Financial Econometrics* 7, 174–196.
- Corsi, F., D. Pirino, & R. Reno. (2010). Threshold bipower variation and the impact of jumps on volatility forecasting. *Journal of Econometrics* 159, 276–288.
- Hayashi, T. & N. Yoshida (2005). On covariance estimation of non-synchronously observed diffusion processes. *Bernoulli* 11, 359–379.
- Ikeda, S. (2015). Two scale realized kernels: A univariate case. *Journal of Financial Econometrics* 13, 126–165.
- Jacod, J., Y. Li, P. Mykland, M. Podolskij & M. Vetter (2009). Microstructure noise in the continuous case: The pre-averaging approach. *Stochastic Processes and Their Applications* 119, 2249–2276.
- Jacod, J. & P. Protter (2012). *Discretization of Processes*. Springer.
- Jacod, J. & M. Rosenbaum (2013). Quarticity and other functionals of volatility: efficient estimation *Annals of Statistics* 41, 1462–1484.
- Kalnina, I. & O. Linton (2008). Estimating quadratic variation in the presence of endogenous and diurnal microstructure noise. *Journal of Econometrics* 147, 47–59.
- Kristensen, D. (2010). Nonparametric filtering of the realized spot volatility: A kernel-based approach. *Econometric Theory* 26, 60–93.
- Lee, S.S. & P.A. Mykland (2008). Jumps in financial markets: A new nonparametric test and jump dynamics. *Review of Financial Studies* 21, 2535–2563.
- Li, Y., P.A. Mykland, E. Renault, L. Zhang & X. Zheng (2014). Realized volatility when sampling times are possibly endogenous. *Econometric Theory* 30, 580–605.
- Mancini, C. (2009). Non-parametric threshold estimation for models with stochastic diffusion coefficient and jumps. *Scandinavian Journal of Statistics* 36, 270–296.
- Noureldin, D., N. Shephard & K. Sheppard (2012). Multivariate high-frequency-based volatility (HEAVY) models. *Journal of Applied Econometrics* 27, 907–933.
- Podolskij, M. & M. Vetter (2009). Bipower-type estimation in a noisy diffusion setting. *Stochastic Processes and Their Applications* 119, 2803–2831.
- Protter, P. (1992). *Stochastic Integration and Differential Equations: A New Approach*, 2nd edition. New York: Springer Verlag.
- Shephard, N. & D. Xiu (2012). Econometric analysis of multivariate realized QML: Estimation of the covariation of equity prices under asynchronous trading. Working Paper, University of Chicago.
- Zhang, L. (2006). Efficient estimation of stochastic volatility using noisy observations: A multi-scale approach. *Bernoulli* 12, 1019–1043.
- Zhou, B. (1996). High-frequency data and volatility in foreign-exchange rates. *Journal of Business & Economic Statistics* 14, 45–52.

Estimation of volatility measures using high frequency data

Ilze Kalnina

Université de Montréal, Montréal, Canada

Natalia Sizova

Rice University, Houston, USA

The availability of high frequency intra-day observations has created a new paradigm in volatility measurement. New methods in conjunction with high-frequency data allow nonparametric estimation of daily volatility and its forecast, variance-covariance matrices, instantaneous volatility and the jump contribution to the total variance. We survey some methods of volatility measurement including the recent literature on volatility estimation with ultra-high-frequency data in the presence of the market microstructure noise. We also discuss challenges specific to the estimation of the variance-covariance matrices with asynchronous observations.

Статьи: эконометрическая теория

Идентификация в классе непараметрических моделей систем одновременных уравнений с выборочной селективностью*

Евгений Ожегов[†]

Высшая школа экономики, Пермь, Россия

В данной статье рассматривается проблема идентификации непараметрической модели систем одновременных уравнений при наличии выборочной селективности. Для представленной модели сформулированы условия идентификации при наличии исключённых переменных в уравнении участия и уравнениях системы. Исключённые переменные позволяют корректировать ошибки уравнений системы на выборочную селективность и одновременность. Подход представляет собой расширение известной непараметрической процедуры идентификации регрессионных функций на случай нетреугольных систем одновременных уравнений.

Ключевые слова: непараметрическое оценивание, выборочная селективность, системы одновременных уравнений, коррекция ошибок

Классификация JEL: C14, C30, C51

1 Введение

В данной статье рассматривается непараметрическая модель системы одновременных уравнений при условии выборочной селективности. Для идентификации модели сформулированы требования на наличие исключённых переменных для уравнения участия и уравнений системы. Класс идентифицируемых моделей ограничен системой уравнений с аддитивно сепарабельными ошибками, распределёнными совместно с непрерывной функцией плотности, и непрерывно дифференцируемыми регрессионными функциями.

Важным приложением рассматриваемой модели, которому не уделяется должное внимание в литературе, является оценивание функции индивидуального спроса на дифференцированные товары с эндогенными характеристиками. Так при моделировании спроса на товары, характеристики которых выбираются одновременно с объемом потребления, мы должны учитывать структурную взаимосвязь между спросом и характеристиками товара. Примером такого товара является, в частности, кредит, эндогенность характеристик которого подчеркивается в работах Attanasio, Goldberg & Kyriazidou (2008) и LaCour-Little (2007). Для идентификации и состоятельного оценивания функции спроса на кредиты также необходимо учитывать тот факт, что выборка выданных кредитов является сформированной неслучайно как под воздействием самоотбора заёмщиков, так и в силу неслучайного одобрения банком заёмщиков с определёнными характеристиками.

Мы предлагаем модель индивидуального спроса и механизм её идентификации, учитывающие одновременность выбора объема потребления и характеристик товара, выборочную

* Данное научное исследование (№ 14-01-0104) выполнено при поддержке Программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2014/2015 гг. Цитировать как: Ожегов, Евгений (2015). «Идентификация в классе непараметрических моделей систем одновременных уравнений с выборочной селективностью», Квантиль, №13, стр. 15–23. Citation: Ozhegov, Evgeniy (2015). “Identification in a class of nonparametric simultaneous equation models with sample selection”, Quantile, No.13, pp. 15–23.

[†] Адрес: 614000, Пермь, ул. Лебедева, дом 27. Электронная почта: tos600@gmail.com

селективность, а также потенциальную разнородность предпочтений, что полностью обусловлено исследовательской необходимостью. Нужно отметить, что не только спрос на основе систем одновременных уравнений не изучен в литературе, но также эконометрика оценивания непараметрических моделей одновременных уравнений при наличии выборочной селективности также является до сих пор не разработанной. Так, наиболее прогрессивными работами по части идентификации и оценивания непараметрических моделей одновременных уравнений являются работы Розы Матцкин, которая сформулировала условия идентификации модели при наличии исключённых инструментов в Matzkin (2015), а также расширила их на случай цензурированных зависимых переменных в Matzkin (2012), оставляя за кадром случай наличия выборочной селективности. Другой близкой работой, изучавшей оценивание систем одновременных уравнений при наличии выборочной селективности, является работа Das, Newey & Vella (2003). В ней авторы рассматривают одно требующее идентификации уравнение с эндогенными регрессорами и предлагают полупараметрические процедуры оценивания такой модели на основе аппроксимации сплайнами и степенными сериями. Мы обобщим предложенный ими подход на случай нетреугольной системы одновременных уравнений с выборочной селективностью, расширив ранговое условие идентификации модели.

Данная статья имеет следующую структуру. В разделе 2 будет представлена модель системы одновременных уравнений с выборочной селективностью. В разделе 3 будут сформулированы и доказаны необходимые условия идентификации модели. Последний раздел подводит итоги работы.

2 Модель

Традиционные модели оценивания индивидуального спроса на кредитные продукты используют параметрические подходы к оцениванию выбора условий кредитного контракта, таких, например, как сумма займа или соотношение суммы займа к стоимости залога (*loan-to-value ratio*, LTV). Оценивание таких моделей обычно сопровождается двумя главными вызовами: выборочной селективностью и эндогенностью всех условий договора. Проблема выборочной селективности возникает, потому что некоторые решения принимаются последовательно и часть объясняющих выбор переменных наблюдается частично на разных стадиях процесса кредитования. Так, если процесс одобрения заёмщиков коррелирован с выбором величины ссуды или другими условиями займа, например, через ненаблюдаемый кредитный риск, то сила данной корреляции будет определять величину смещения оценок в уравнении выбора величины ссуды, что доказывается, например в Ross (2000). Теоретическая взаимозависимость выбора на разных этапах процесса кредитования обсуждается также в более ранних работах (см., например, Follain, 1990 и Rachlis & Yezer, 1993).

Ряд работ по оцениванию спроса на кредиты также обсуждает эндогенность всех параметров кредитного договора при использовании их в качестве объясняющих спрос переменных. В работе Ambrose, LaCour-Little & Sanders (2004) подчеркивается эндогенность суммы займа и отношения суммы займа и LTV. Attanazio, Goldberg & Kyriazidou (2008) обсудили и учли эндогенность процентной ставки и срока погашения кредита при моделировании спроса на автокредиты и применили две непараметрические процедуры оценивания спроса при условии неслучайного отбора заёмщиков. Они также нашли эмпирическое подтверждение необходимости использования более гибкой регрессионной функции спроса, а также непостоянной эластичности спроса по процентной ставке и сроке погашения кредита на разных квантилях распределения дохода заёмщиков.

Тем не менее, не только сумма займа может зависеть от других условий кредита. Так, выбор суммы займа или LTV может влиять на предпочтения других условий кредита, что обуславливает необходимость моделирования одновременного выбора всех параметров кредита, а также тот факт, что предпочтения условий кредита могут быть разнородны. При

этом интерес представляет не только корректная идентификация выбора объема потребления, но и идентификация всех потенциальных структурных взаимосвязей между выбором объема потребления и характеристик товара.

Подводя итог, процесс кредитования, или, в общем, модель индивидуального спроса на дифференцированный товар с эндогенными характеристиками, может быть представлена следующей эконометрической моделью:

$$d_i = \begin{cases} 1, & g_0(x_i, z_{0i}) + e_{0i} \geq 0, \\ 0, & g_0(x_i, z_{0i}) + e_{0i} < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{1i}^* = g_1(y_{-1i}^*, x_i, z_{1i}) + e_{1i}, \\ \dots \\ y_{ki}^* = g_k(y_{-ki}^*, x_i, z_{ki}) + e_{ki}, \end{cases} \quad (1)$$

$$y_i = \begin{cases} y_i^*, & \text{если } d_i = 1, \\ \text{ненаблюдаемо}, & \text{если } d_i = 0, \end{cases}$$

где d_i — индикатор подписания контракта (наблюдения ненулевого потребления), x_i набор демографических характеристик заёмщиков (потребителей), $y_i = (y_{1i}, \dots, y_{ki}) = (y_{ji}, y_{-ji})$ — набор параметров кредитного договора (характеристик товара), включающий логарифм суммы займа, LTV, процентную ставку и логарифм срока погашения кредита, z_{0i} — набор исключённых переменных для уравнения подписания контракта, а $z_i = (z_{1i}, \dots, z_{ki}) = (z_{ji}, z_{-ji})$ — набор исключённых инструментов для условий кредитного контракта.

Модель (1) содержит систему одновременных уравнений на этапе моделирования выбора условий займа. Более того, обычно выборка индивидуальных данных для оценивания спроса содержит репрезентативную часть домохозяйств (в случае опросных данных), либо все домохозяйства, обратившиеся в банк за кредитом (в случае банковских данных). В этом случае демографические переменные обычно наблюдаются полностью, а параметры кредитного договора только для части домохозяйств, взявших кредит, процесс получения которого, вообще говоря, не случаен. Таким образом, необходимо также учитывать потенциальную выборочную селективность. Для каждого заёмщика i эконометрист наблюдает переменные $(x_i, z_{0i}, z_{1i}, \dots, z_{ki})$, а переменные (y_{1i}, \dots, y_{ki}) только в случае $d_i = 1$. Случайные переменные $(e_{0i}, e_{1i}, \dots, e_{ki})$ не наблюдаемы эконометристом, а условия, накладываемые на них, описаны далее. Задачей эконометриста является оценивание функций (g_1, \dots, g_k) непараметрическим образом.

Первое уравнение в (1) является уравнением участия, определяющим, будет ли заключён контракт. Вторая часть (1) описывает систему одновременного выбора характеристик контракта. Важным является то, что каждое структурное уравнение системы (1) имеет переменную z_{ji} , исключённую из всех остальных уравнений. На этом факте будет базироваться идентификация.

3 Идентификация модели

Проблема смещения ввиду выборочной селективности впервые обсуждалась в Gronau (1973) и Heckman (1974). Хекман также предложил процедуру оценивания такой модели методом максимального правдоподобия либо используя двухшаговую процедуру в Heckman (1976) и Heckman (1979), при которой ошибка уравнения выбора (уравнения для y) корректируется на потенциальную ковариацию с ошибкой уравнения участия (уравнения для d). Оба подхода, однако, основывались на предположении о том, что совместное распределение ошибок в

уравнении участия и уравнении выбора является двумерным нормальным. Следующие работы ослабили эту предпосылку при использовании двухшаговой процедуры с помощью полупараметрических подходов, например, раскладывая функционально неизвестную функцию коррекции ошибки в ряд Фурье (см. Heckman & Robb, 1985), или аппроксимируя её серией степенных функций (см. Newey, 1988). С точки зрения экономической теории эндогенность параметров контракта y_i возникает естественным образом и очень важна, при этом она часто представима в виде структурной системы одновременных уравнений, как в системе (1). Дополнительные предположения о функциональной форме структурных функций в системе (1) зачастую слишком ограничительны и могут вести к неробастным спецификациям. Потому непараметрический подход, используемый в этой статье, предпочтителен. В работе Newey & Powell (2003) впервые была предложена непараметрическая процедура оценивания треугольной системы одновременных уравнений с неизвестными регрессионными функциями, а в Newey, Powell & Vella (1999) далее была разработана двухшаговая процедура оценивания, использующая коррекцию ошибки на её ковариацию с эндогенными регрессорами и аппроксимирующая функцию коррекции степенной серией, зависящей от ошибок уравнения в приведенной форме. В Newey (2013) также приведен обзор всех известных непараметрических методов инструментальных переменных, а также обсуждается проблема слабых инструментов без обсуждения конструктивных подходов к тестированию силы инструментов, что может быть направлением дальнейших исследований.

В Das, Newey & Vella (2003) предлагается метод оценивания треугольной системы одновременных уравнений при наличии выборочной селективности. Они также предложили аппроксимировать функцию коррекции ошибки серией степенных функций или сплайнов от значения предрасположенности из уравнения участия и остатков уравнений в приведенной форме.

Мы расширим известное семейство двухшаговых процедур оценивания на случай нетреугольной непараметрической системы одновременных уравнений при наличии выборочной селективности и произвольного совместного распределения ошибок всех уравнений.

Введем некоторые предположения, необходимые для идентификации.

Предположение 1. Набор переменных $W = (x, z, z_0)$ статистически независим от набора переменных (e_0, e_1, \dots, e_k) .

Предположение 2. Функция плотности $f_{e_0, e}(e_0, e_1, \dots, e_k)$ непрерывна на \mathbb{R}^{k+1} .

При идентификации каждого отдельного структурного уравнения $y_{ji} = g_j(y_{-ji}, x_i, z_{ji}) + e_{ji}$ следует учитывать, что изменение эндогенных переменных левой части y_{-ji} будет приводить к изменению y_{ji} не только через функцию g_j , но также и через ковариацию между e_{-ji} и e_{ji} , а изменение экзогенных переменных x_i будет приводить к изменению y_{ji} также через ковариацию между e_{0i} и e_{ji} . В таком случае, идентификацию необходимо построить так, чтобы получить вариацию y_{ji} за счет вариации переменных (y_{-ji}, x_i, z_{ji}) при известном ожидаемом изменении e_{ji} .

Если $p = \mathbb{E}[d|x_0, w_0]$ — это значение предрасположенности участия, то ожидаемое значение e_{ji} , условное на (y_{-ji}, x_i, z_{ji}) и $d_i = 1$, можно получить как $\mathbb{E}[e_j|y_{-j}, x, z, z_0, d = 1] = \mathbb{E}[e_j|e_{-j}, g_0(x_0, z_0) + e_0 \geq 0] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-g_0(x_0, z_0)}^{\infty} e_j f_{e_0, e}(s, r|e_{-j}) ds dr = \phi_j(p, e_{-j})$, где ϕ_j будет известной функцией при известном виде совместного распределения ошибок $f_{e_0, e}$. При произвольном распределении $f_{e_0, e}$ функция ϕ_j будет иметь неизвестный вид, но будет функцией известного набора аргументов, (p, e_{-j}) . Таким образом, идентификация будет построена вокруг предварительной идентификации предрасположенности участия p и ошибок e_{-j} , а также функции ϕ_j , что далее позволит идентифицировать регрессионные функции g_j .

Процедура идентификации модели (1) будет состоять из следующих шагов.

На первом шаге необходимо идентифицировать значение предрасположенности $p = \mathbb{E}[d|x_0, z_0]$ из уравнения участия:

$$d_i = \begin{cases} 1, & g_0(x_i, z_{0i}) + e_{0i} \geq 0, \\ 0, & g_0(x_i, z_{0i}) + e_{0i} < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Для любого маржинального распределения f_{e_0} , $\mathbb{E}[d|x, z_0] = \int_{-g_0(x, z_0)}^{\infty} f_{e_0}(s) ds = \gamma_0(x, z_0)$, если g_0 является непрерывной, что и будем предполагать далее.

Предположение 3. Функция $g_0(x, z_0)$ является непрерывно дифференцируемой с непрерывной функцией распределения почти всюду.

Функция γ_0 при произвольном распределении e_0 и функциональной форме g_0 будет функцией с произвольной функциональной формой, но будет зависеть от известного набора переменных, (x, z_0) . Условное ожидание $p = \mathbb{E}[d|x_0, z_0]$ идентифицируемо, т.к. (d, x, z_0) наблюдаемы, а (x, z_0) независимы от e_0 по предположению 1. Таким образом, изменение (x, z_0) будет влиять на d только через функцию γ_0 , что позволяет восстановить $p = \mathbb{E}[d|x, z_0]$.

На следующем шаге необходимо идентифицировать ошибки e_{-j} за счет изменения переменных, не влияющих на y_j . Для этого необходимо идентифицировать уравнения для каждой y_j в приведенной форме, скорректированные на выборочную селективность, получив из них ошибки e_j :

$$e_j = y_j - \mathbb{E}[y_j|x, z, z_0, d = 1]. \quad (3)$$

Если e_j имеет совместное маржинальное распределение с e_0 с функцией плотности f_{e_0, e_j} , то

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e_j|x, z, z_0, d = 1] &= \mathbb{E}[e_j|g_0(x, z_0) + e_0 \geq 0] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-g_0(x, z_0)}^{\infty} e_j f_{e_0, e_j}(s, r) ds dr = \lambda_j(p). \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда y_j можно разложить на регрессионную функцию в приведенной форме и функцию коррекции ошибки λ_j в силу независимости (x, z, z_0) и e_j :

$$\mathbb{E}[y_j|x, z, z_0, d = 1] = \gamma_j(x, z) + \lambda_j(p). \quad (5)$$

Если p — это значение предрасположенности, полученное на предыдущем шаге оценивания, то зафиксировав значения (x, z) , мы можем идентифицировать λ_j за счет изменения z_0 , являющейся аргументом p . При этом необходимо, чтобы z_0 действительно имела существенное влияние на p .

Предположение 4. Почти наверное $\partial g_0(x, z_0)/\partial z_0 \neq 0$.

Далее же, зная λ_j , мы можем идентифицировать γ_j , меняя значения (x, z) , зафиксировав z_0 . При этом идентификация по данному принципу будет возможна, если восстанавливаемые функции λ_j и γ_j будут непрерывно дифференцируемы, что и будем предполагать.

Предположение 5. Функции $\gamma_j(x, z)$ и $\lambda_j(p)$ являются непрерывно дифференцируемыми с непрерывной функцией распределения почти всюду.

Наконец, следует идентифицировать каждое уравнение структурной формы, корректируя ошибки на выборочную селективность и одновременность выбора y , используя значение

предрасположенности и ошибки приведенной формы. Если e_j имеет совместное распределение с e_0 и e_{-j} с функцией плотности $f_{e_0, e}$, то

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e_j | y_{-j}, x, z, z_0, d = 1] &= \mathbb{E}[e_j | e_{-j}, g_0(x_0, z_0) + e_0 \geq 0] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-g_0(x_0, z_0)}^{\infty} e_j f_{e_0, e}(s, r | e_{-j}) ds dr = \phi_j(p, e_{-j}). \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда y_j можно разложить на регрессионную функцию в структурной форме и функцию коррекции ошибки как

$$\mathbb{E}[y_j | y_{-j}, x, z, z_0, d = 1] = g_j(y_{-j}, x, z_j) + \phi_j(p, e_{-j}). \quad (7)$$

Если p и e_{-j} — это значение предрасположенности и ошибки уравнений в приведенной форме, идентифицированные на предыдущих шагах, то зафиксировав значения (y_{-j}, x, z_j) , мы можем идентифицировать ϕ_j за счет изменения z_0 , являющейся аргументом p , а также за счет изменения z_{-j} , влияющих на e_{-j} , если ϕ_j являются непрерывно дифференцируемой. Дополнительным необходимым условием идентификации теперь также должно являться то, что z имеют существенное влияние на y и, соответственно, на e в уравнениях приведенной формы.

Предположение 6. Почти наверное $\text{rank}(\partial\gamma(x, z)/\partial z) = \dim(y)$.

Далее же, зная ϕ_j , мы можем идентифицировать g_j , меняя значения (y_{-j}, x, z_j) , зафиксировав (z, z_0) , при условии, что g_j являются непрерывно дифференцируемыми.

Предположение 7. Функции $g_j(y_{-j}, x, z_j)$ и $\phi_j(p, e_{-j})$ являются непрерывно дифференцируемыми с непрерывной функцией распределения почти всюду.

Формализуем все введенные условия для идентификации регрессионных функций g_j .

Теорема 1. Если верны предположения 1–7, то каждая регрессионная функция g_j идентифицируема вплоть до аддитивной константы.

Доказательство. См. Приложение. \square

Условия введенной теоремы являются вполне естественными и неограничительными.

Первая группа условий (предположения 3, 5, 7) требует от регрессионных функций и функций коррекции ошибок быть непрерывно дифференцируемыми. Данное условие при этом может быть ослаблено в части экзогенных регрессоров x , позволяя им быть дискретными и входить в регрессионную функцию аддитивно сепарабельно (более подробно см. в Das, Newey & Vella, 2003).

Вторая группа условий (предположения 4, 6) накладывает требования на наличие и релевантность исключённых переменных. Так, требуется хотя бы одна значимая исключённая переменная z_0 в уравнении участия, а также хотя бы один значимый исключённый инструмент z_j для каждой эндогенной переменной y_j , при этом эффекты исключённых инструментов на эндогенные переменные в уравнениях приведенной формы не должны быть коллинеарны.

Также требуется, чтобы все включённые и исключённые переменные были ортогональны ошибкам (предположение 1), а распределение ошибок было непрерывным (предположение 2).

4 Заключение

В данной статье рассмотрены проблемы идентификации непараметрических моделей систем одновременных уравнений при наличии выборочной селективности. Так при игнорировании одновременности и выборочной селективности идентификация каждой отдельной структурной регрессионной функции будет невозможна, т.к. невозможно будет разделить вариацию зависимой переменной на вариацию регрессионной функции и ковариацию ошибок.

Данное исследование представляет процедуру идентификации, позволяющую корректировать ошибки уравнений системы на выборочную селективность и одновременность выбора при произвольном совместном распределении ошибок и виде регрессионных функций. Процедура представляет собой расширение непараметрической процедуры, предложенной в работе Das, Newey & Vella (2003) на случай нетреугольных систем одновременных уравнений.

Для представленной модели сформулированы условия идентификации. Так, модель будет идентифицируема при наличии хотя бы одного исключённого регрессора для уравнения выбора, хотя бы одного исключённого релевантного инструмента для каждой зависимой переменной системы одновременных уравнений. Регрессионные функции и функции коррекции ошибок должны также быть непрерывно дифференцируемыми.

Данная статья естественно развивает сферу применения двухшаговых процедур коррекции ошибки на модели систем одновременных уравнений нетреугольной формы, предлагая простую последовательную процедуру идентификации. Однако, существенным ограничением при её использовании пока является аддитивность ошибок, ограничивающая сферу применения модели непрерывными зависимыми переменными.

Список литературы

- Ambrose, B., M. LaCour-Little & A. Sanders (2004). The effect of conforming loan status on mortgage yield spreads: A loan level analysis. *Real Estate Economics* 32, 541–69.
- Attanazio, O., P. Goldberg & E. Kyriazidou (2008). Credit constraints in market for consumer durables: Evidence from micro data on car loans. *International Economic Review* 49, 401–36.
- Das, M., W. Newey & F. Vella (2003). Nonparametric estimation of sample selection models. *Review of Economic Studies* 70, 33–58.
- Follain, J.R. (1990). Mortgage choice. *Real Estate Economics* 18, 125–44.
- Gronau, R. (1973). Wage comparisons: A selectivity bias. NBER Working Paper #13.
- Heckman, J. (1974). Shadow prices, market wages, and labor supply. *Econometrica* 42, 679–94.
- Heckman, J. (1976). The common structure of statistical models of truncation, sample selection, and limited dependent variables and a sample estimator for such models. *Annals of Economic and Social Measurement* 5, 475–92.
- Heckman, J. (1979). Sample selection bias as a specification error. *Econometrica* 47, 153–61.
- Heckman, J. & R. Robb (1985). Alternative methods for evaluating the impact of interventions: An overview. *Journal of Econometrics* 30, 239–67.
- LaCour-Little, M. (2007). The home purchase mortgage preferences of low- and moderate-income households. *Real Estate Economics* 35, 265–90.
- Matzkin, R. (2012). Identification in nonparametric limited dependent variable models with simultaneity and unobserved heterogeneity. *Journal of Econometrics* 166, 106–115.
- Matzkin, R. (2015). Estimation of nonparametric models with simultaneity. *Econometrica* 83, 1–66.
- Newey, W. (2013). Nonparametric instrumental variables estimation. *American Economic Review* 103, 550–556.
- Newey, W. & J. Powell (2003). Instrumental variables estimation of nonparametric models. *American Economic Review* 103, 550–556.

- Newey, W., J. Powell & F. Vella (2003). Nonparametric estimation of triangular simultaneous equations models. *Econometrica* 67, 565–603.
- Philips, R. & A. Yezer (1996). Self-selection and tests for bias and risk in mortgage lending: Can you price the mortgage if you don't know the process? *Journal of Real Estate Research* 11, 87–102.
- Rachlis, M. & A. Yezer (1996). Serious flaws in statistical tests for discrimination in mortgage markets. *Journal of Housing Research* 4, 315–336.
- Ross, S.L. (2000). Mortgage lending, sample selection and default. *Real Estate Economics*, 8, 581–621.

Приложение

Лемма 1. Если выполнены предположения 1–5, то каждая γ_j и λ_j идентифицируема вплоть до аддитивной константы.

Доказательство аналогично Т.2.1 в Das, Newey & Vella (2003): Любая наблюдаемо эквивалентная модель для уравнения (3) должна иметь $\mathbb{E}[y_j|x, z, z_0, d = 1] = \hat{\gamma}_j(x, z) + \hat{\lambda}_j(p)$. Рассмотрим $f_1(x, z) + f_2(p) = 0$, где $f_1(x, z) = \gamma_j(x, z) - \hat{\gamma}_j(x, z)$, и $f_2(p) = \lambda_j(p) - \hat{\lambda}_j(p)$. Если g_0 , γ_j и λ_j непрерывно дифференцируемы, то f_1 и f_2 тоже непрерывно дифференцируемы. Продифференцируем $f_1 + f_2 = 0$ по переменным (z_0, x, z) :

$$0 = \frac{\partial f_2(p)}{\partial p} \frac{\partial g_0(x, z_0)}{\partial z_0},$$

$$0 = \frac{\partial f_1(x, z)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(p)}{\partial p} \frac{\partial g_0(x, z_0)}{\partial x}, \quad (8)$$

$$0 = \frac{\partial f_1(x, z)}{\partial z}.$$

Первое условие и $\frac{\partial g_0(x, z_0)}{\partial z_0} \neq 0$ дает $\frac{\partial f_2(p)}{\partial p} = 0$, что означает, что f_2 — константа, а $\hat{\lambda}_j(p) = \lambda_j(p) + C_j$. Тогда второе условие даст $\frac{\partial f_1(x, z)}{\partial x} = 0$. Это значит, что $f_1(x, z)$ — тоже константа, а $\hat{\gamma}_j(x, z) = \gamma_j(x, z) + C_j$. □

Доказательство теоремы 1. По лемме 1 функции $\gamma_j(x, z)$, $\lambda_j(p)$ идентифицируемы, а значит и e_{-j} идентифицируемы. Докажем идентификацию регрессионных функций g_j . Любая наблюдаемо эквивалентная модель для уравнения (7) должна иметь $\mathbb{E}[y_j|y_{-j}, x, z, z_0, d = 1] = \hat{g}_j(y_{-j}, x, z_j) + \hat{\phi}_j(p, e_{-j})$. Рассмотрим $f_3(y_{-j}, x, z_j) + f_4(p, e_{-j}) = 0$, где $f_3(y_{-j}, x, z_j) = g_j(y_{-j}, x, z_j) - \hat{g}_j(y_{-j}, x, z_j)$, а $f_4(p, e_{-j}) = \phi_j(p, e_{-j}) - \hat{\phi}_j(p, e_{-j})$.

Если g_0 , γ_j , g_j , λ_j и ϕ_j являются непрерывно дифференцируемыми, то и $f_3(y_{-j}, x, z_j)$ и $f_4(p, e_{-j})$ тоже непрерывно дифференцируемы. Продифференцируем тождество $f_3 + f_4 = 0$ по (z_j, z_{-j}, x, z_0) :

$$0 = \frac{\partial f_3(y_{-j}, x, z_j)}{\partial z_j} + \frac{\partial f_3(y_{-j}, x, z_j)}{\partial y_{-j}} \frac{\partial \gamma_{-j}(x, z)}{\partial z_j},$$

$$0 = \frac{\partial f_3(y_{-j}, x, z_j)}{\partial y_{-j}} \frac{\partial \gamma_{-j}(x, z_j)}{\partial z_{-j}}, \quad (9)$$

$$0 = \frac{\partial f_3(y_{-j}, x, z_j)}{\partial y_{-j}} \frac{\partial \gamma_{-j}(x, z_j)}{\partial x} + \frac{\partial f_3(y_{-j}, x, z_j)}{\partial x} + \frac{\partial f_4(p, e_{-j})}{\partial p} \frac{\partial g_0(x, z_0)}{\partial x},$$

$$0 = \frac{\partial f_4(p, e_{-j})}{\partial p} \frac{\partial g_0(x, z_0)}{\partial z_0}.$$

Последнее условие и $\frac{\partial g_0(x, z_0)}{\partial z_0} \neq 0$ дают $\frac{\partial f_4(p, e_{-j})}{\partial p} = 0$. Выполнение рангового условия $\text{rank}[\frac{\partial \gamma(x, z)}{\partial z}] = \dim(y)$ обеспечивает, что для каждого j найдется z_j с $\frac{\partial \gamma_j(x, z)}{\partial z_j} \neq 0$ и $\frac{\partial \gamma_{-j}(x, z)}{\partial z_{-j}} \neq 0$ соответственно, что делает второе условие эквивалентным $\frac{\partial f_3(y_{-j}, x, z_j)}{\partial y_{-j}} = 0$. Заменяя $\frac{\partial f_3(y_{-j}, x, z_j)}{\partial y_{-j}} = 0$ в третьем условии и используя $\frac{\partial f_4(p, e_{-j})}{\partial p} = 0$, получим, что $\frac{\partial f_3(y_{-j}, x, z_j)}{\partial x} = 0$. Наконец, $\frac{\partial f_3(y_{-j}, x, z_j)}{\partial y_{-j}} = 0$ в первом условии дает $\frac{\partial f_3(y_{-j}, x, z_j)}{\partial z_j} = 0$.

Все полученные результаты говорят о том, что $f_3(y_{-j}, x, z_j) = g_j(y_{-j}, x, z_j) - \hat{g}_j(y_{-j}, x, z_j)$ является константой, а значит $\hat{g}_j(y_{-j}, x, z_j) = g_j(y_{-j}, x, z_j) + C_j$. \square

Identification in a class of nonparametric simultaneous equation models with sample selection

Evgeniy Ozhegov

Higher School of Economics, Perm, Russia

We consider identification of the nonparametric simultaneous equation model with the presence of sample selection. For the proposed model we introduce necessary conditions for its identification if excluded variables for selection and outcome equations are available. Our approach extends the well known class of nonparametric two-step identification procedures for the case of non-triangular simultaneous equations.

Keywords: nonparametrics, sample selection, simultaneous equations, control function

JEL Classification: C13, C30, C51

Статьи: макроэконометрика

Альтернативные модели прогнозирования основных макроэкономических показателей в Армении^{*}

Карен Погосян[†]

Центральный банк Армении, Ереван, Армения

В данной работе рассматриваются особенности применения моделей векторной авторегрессии для краткосрочного прогнозирования динамики основных макроэкономических показателей. В частности, рассматривается традиционная модель векторной авторегрессии без ограничений, Байесовская модель векторной авторегрессии и факторно-расширенная модель векторной авторегрессии. Для оценивания параметров указанных моделей применяются временные ряды макроэкономических показателей Армении с 1996 по 2014 гг. в квартальном разрезе. На основе минимизации среднеквадратичной ошибки прогноза делается вывод о наиболее приемлемой модели.

Ключевые слова: векторная авторегрессия, главные компоненты, Байесовское оценивание, макроэкономические показатели, Армения

Классификация JEL: C11, C13, C52, C53

1 Введение

Для проведения эффективной денежно-кредитной политики центральные банки (ЦБ) заинтересованы в постоянном совершенствовании методологии краткосрочного и долгосрочного прогнозирования динамики макроэкономических показателей. Известно, что денежно-кредитная политика ЦБ влияет на экономику с некоторым временным лагом. В результате при принятии того или иного решения денежно-кредитной политики ЦБ более заинтересованы в том что может произойти с динамикой макроэкономических показателей в будущем. Именно поэтому в ЦБ разрабатываются структурные динамические модели общего равновесия (см. обзор в Микушева 2014), которые в основном применяются для объяснения структурных изменений в экономике, а также для долгосрочного прогноза экономической динамики. С другой стороны, известно, что для долгосрочной динамики макроэкономических показателей важное значение имеют краткосрочные колебания, из которых в конечном счете складывается долгосрочная динамика. Следовательно, для анализа долгосрочных колебаний экономической динамики особое значение для ЦБ приобретает изучение и практическое применение методологии краткосрочного прогнозирования. Опыт различных Центральных Банков показывает, что для краткосрочного прогнозирования макроэкономических показателей целесообразно применять эконометрические модели, основанные на анализе временных рядов и, в частности, модель векторной авторегрессии.

В данной работе мы рассматриваем три известные и наиболее распространенные в практике краткосрочного прогнозирования модели векторной авторегрессии. В частности, рассматриваются модель векторной авторегрессии без ограничений (unrestricted vector autoregression, VAR), Байесовская модель векторной авторегрессии (Bayesian vector autoregression, BVAR) и,

^{*}Цитировать как: Погосян, Карен (2015). «Альтернативные модели прогнозирования основных макроэкономических показателей в Армении», Квантиль, №13, стр. 25–39. Citation: Poghosyan, Karen (2015). “Alternative models for forecasting the key macroeconomic variables in Armenia”, Quantile, No. 13, pp. 25–39.

[†]Адрес: 0010, Ереван, ул. Вазгена Саргсяна 6, Центральный банк Армении, департамент экономических исследований. Электронная почта: karen.poghosyan@cba.am

наконец, получившая в последнее десятилетие большую популярность факторно-расширенная модель векторной авторегрессии (factor augmented vector autoregression, FAVAR). Указанные модели векторной авторегрессии имеют существенные различия. По крайней мере можно указать следующие: во-первых, в модель VAR можно включать сравнительно небольшое количество временных рядов, тогда как в модель FAVAR можно включать сравнительно большое количество исходных временных рядов. Во-вторых, если модель VAR является моделью без ограничений, то модель BVAR является моделью с ограничениями. В третьих, модель FAVAR, в отличие от моделей VAR и BVAR, кроме исходных временных рядов включает также динамику так называемых главных компонент. Расчет главных компонент, как правило, осуществляется на основе ковариационной (или корреляционной) матрицы исходных временных рядов, причем количество рассчитанных главных компонент бывает значительно меньше количества исходных временных рядов. В эконометрической литературе существуют различные подходы к выделению главных компонент. В частности наибольшее распространение получили следующие три алгоритма: статический алгоритм (Stock & Watson 2002) и два динамических алгоритма из Forni, Hallin, Lippi & Reichlin (2005) и из Doz, Giannone & Reichlin (2011, 2012). В данной работе для выделения главных компонент мы применяем статический алгоритм (Stock and Watson 2002) и динамический алгоритм (Doz, Gianonne & Reichlin 2011, 2012).

Для оценивания параметров вышеуказанных моделей применяются фактические временные ряды макроэкономических показателей Армении с 1996 по 2014 гг. в квартальном разрезе. Некоторые из макроэкономических временных рядов были подвергнуты первоначальной статистической обработке, в частности, некоторые временные ряды были прологарифмированы, сезонно сглажены, и взяты их первые разности.

Основная цель данной работы состоит в том, чтобы на основе сравнительного анализа прогнозных свойств различных моделей векторной авторегрессии найти ту модель, которая была бы наиболее адекватна в смысле минимизации среднеквадратичной ошибки прогноза для прогнозирования динамики макроэкономических показателей в Армении. С целью поиска наиболее адекватной модели мы проделываем различные эксперименты, основываясь на фактической динамике временных рядов. Сущность этих экспериментов состоит в следующем: общее количество наблюдений во временных рядах делим на две части, далее первую часть наблюдений применяем для оценивания различных моделей векторной авторегрессии, а вторую часть наблюдений применяем для сравнения с полученными прогнозами по различным моделям векторной авторегрессии. Генерация прогнозов по различным моделям векторной авторегрессии осуществляется по рекурсивной схеме регрессионного эксперимента. Наилучшей считается та модель векторной авторегрессии, которая минимизирует показатель среднеквадратичной ошибки прогноза.

Настоящая работа имеет следующую структуру. Во второй части дается обзор основных моделей векторной авторегрессии. В этой же части дается общее описание статического и динамического (во временной области) алгоритмов расчета главных компонент. В третьей части мы даем общую характеристику и результат первичной обработки применяемых временных рядов. Здесь же мы предоставляем источники сбора первичной статистической информации, а также некоторые сведения о применяемом компьютерном пакете для осуществления вычислений. В четвертой части мы представляем сущность рекурсивной схемы регрессионного эксперимента. В последней части приводятся результаты сравнительного анализа различных моделей векторной авторегрессии, а также делаются выводы о наиболее адекватной модели прогнозирования.

2 Обзор моделей векторной авторегрессии

В этой части работы мы представим общую идею и принципы оценивания трех основных и наиболее распространенных в практике прогнозирования моделей векторной авторегрессии. Изложение начнем с модели векторной авторегрессии без ограничений, которая имеет следующий общий вид:

$$y_t = c + A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + \dots + A_p y_{t-p} + v_t, \quad (1)$$

где y_t — вектор исходных переменных размера $n \times 1$, c — вектор постоянных коэффициентов размера $n \times 1$, A_1, A_2, \dots, A_p — матрицы оцененных параметров размера $n \times n$ для различных временных лагов $l = 1, 2, \dots, p$, v_t — вектор ошибок модели размер $n \times 1$, $v_t \sim N(0, \sigma^2 I_{n \times n})$. Известно, что параметры модели векторной авторегрессии без ограничений можно существенно оценить методом наименьших квадратов (Hamilton 1994). Заметим, что в модели векторной авторегрессии без ограничений часто бывает необходимо оценивать значительное количество неизвестных параметров (особенно когда $p > 1$). Как правило, проблема, связанная со сверх-параметризацией модели векторной авторегрессии, может стать причиной смещения оценок, и как следствие этого увеличения среднеквадратичной ошибки прогнозов (Gupta & Kabundi 2009a, 2009b).

Для решения проблемы сверх-параметризации в эконометрической литературе предлагается альтернативный алгоритм для оценивания модели векторной авторегрессии, основанный на Байесовском подходе. Основная идея Байесовской модели векторной авторегрессии (BVAR) состоит в том, что при увеличении временного лага модели оцениваемые параметры обнуляются. В этом отношении модель BVAR по сути своей является моделью с ограничениями. Ограничения на параметры модели делаются исходя из априорной информации о нормальной природе распределения параметров с нулевым математическим ожиданием и убывающим среднеквадратическим отклонением. Исключением является лишь параметр при первом лаге зависимой переменной, у которого математическое ожидание приравнивают единице. Изложенная схема априорной информации о распределении параметров модели векторной авторегрессии была предложена в Litterman (1981). Таким образом, обобщая этот подход, мы можем сделать следующие выводы:

1. Параметры первого лага зависимой переменной следуют процессу авторегрессии первого порядка AR(1), тогда как параметры для остальных лагов приравниваются нулю;
2. Стандартные отклонения параметров модели задаются по следующему правилу:

$$\frac{\lambda_1}{l\lambda_3} \text{ если } i = j, \quad \frac{\sigma_i \lambda_1 \lambda_2}{\sigma_j l \lambda_3} \text{ если } i \neq j,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — постоянные коэффициенты, конкретные значения которых равны $\lambda_1 = 0, 2$, $\lambda_2 = 0, 5$, $\lambda_3 = 1$ или 2 (Canova 2007), i — номер i -ой переменной в i -ом уравнении модели векторной авторегрессии, j — номер j -ой переменной в i -ом уравнении модели векторной авторегрессии, σ_i, σ_j — стандартные отклонения ошибок модели авторегрессии 1-го порядка для i -ой и j -ой переменной соответственно; если $i = j$, то этот коэффициент совпадает с λ_1 коэффициентом первого лага зависимой переменной.

Для большей наглядности приведем условный пример задания априорных параметров распределения в модели векторной авторегрессии с двумя переменными (x_t, y_t) и временным лагом, равным $l = 2$. В данном случае будем иметь следующую модель:

$$\begin{aligned} x_t &= a_{10} + a_{11}x_{t-1} + a_{12}y_{t-1} + b_{11}x_{t-2} + b_{12}y_{t-2} + v_t, \\ y_t &= a_{20} + a_{21}x_{t-1} + a_{22}y_{t-1} + b_{21}x_{t-2} + b_{22}y_{t-2} + u_t. \end{aligned} \quad (2)$$

Из приведенной модели можно заметить, что для переменных x_t и y_t коэффициентами авторегрессии первого порядка являются a_{11} и a_{22} соответственно. Следовательно, согласно

Litterman (1981), априорные математические ожидания для параметров модели векторной авторегрессии будет вектор $\tilde{b}_0 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)'$, т.е. кроме параметров a_{11} и a_{22} , априорные математические ожидания всех остальных параметров равны нулю. Матрица априорных дисперсий H является диагональной и имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_1 \lambda_1 \lambda_2}{\sigma_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_1}{2^{\lambda_3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_1 \lambda_1 \lambda_2}{\sigma_2 2^{\lambda_3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2 \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_2 \lambda_1 \lambda_2}{\sigma_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_2 \lambda_1 \lambda_2}{\sigma_1 2^{\lambda_3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_1}{2^{\lambda_3}} \end{pmatrix}^2$$

Диагональные элементы $(\sigma_1 \lambda_4)^2$ и $(\sigma_2 \lambda_4)^2$ являются априорными дисперсиями для параметров a_{10} и a_{20} , где $\lambda_4 = 10^5$ (Canova 2007). Элементы $(\lambda_1)^2$ и $\left(\frac{\lambda_1}{2^{\lambda_3}}\right)^2$ являются априорными дисперсиями соответственно для a_{11} , b_{11} и a_{22} , b_{22} . Наконец, элементы $\left(\frac{\sigma_1 \lambda_1 \lambda_2}{\sigma_2}\right)^2$ и $\left(\frac{\sigma_1 \lambda_1 \lambda_2}{\sigma_2 2^{\lambda_3}}\right)^2$ являются априорными дисперсиями для параметров a_{12} и b_{12} , тогда как $\left(\frac{\sigma_2 \lambda_1 \lambda_2}{\sigma_1}\right)^2$ и $\left(\frac{\sigma_2 \lambda_1 \lambda_2}{\sigma_1 2^{\lambda_3}}\right)^2$ — априорные дисперсии для a_{21} и b_{21} .

Следующий вопрос, который требует некоторых пояснений, — имея параметры априорного распределения, каким образом можно оценить параметры апостериорного распределения. Для этого можно применить Байесовский подход к оцениванию параметров. В случае векторной авторегрессии Байесовские оценки апостериорного распределения можно вывести аналитическим путем (Hamilton 1994). Аналитические формулы для параметров апостериорного распределения имеют вид:

$$\begin{aligned} \beta^* &= (H^{-1} + \Sigma^{-1} \otimes X_t' X_t)^{-1} (H^{-1} \tilde{b}_0 + \Sigma^{-1} \otimes X_t' X_t \hat{b}), \\ \mathbb{V}(\beta^*) &= (H^{-1} + \Sigma^{-1} \otimes X_t' X_t)^{-1}, \end{aligned} \quad (3)$$

где β^* — вектор апостериорных математических ожиданий параметров модели векторной авторегрессии, X_t — матрица размера $T \times k$ исходных временных рядов, \hat{b} — вектор параметров, оцененных стандартным методом наименьших квадратов, \tilde{b}_0 — вектор априорных математических ожиданий параметров (см. условный пример выше), H — матрица априорных дисперсий для параметров модели (см. условный пример выше), Σ — матрица размера $k \times k$, на главной диагонали которой стоят единицы. Таким образом, имея все вышеперечисленные векторы и матрицы, с помощью формул (4) можно подсчитать апостериорные параметры, а также апостериорные дисперсии параметров модели.

Теперь обратимся к рассмотрению факторно-расширенной модели векторной авторегрессии (FAVAR). Как было указано выше, эта модель, кроме основных временных рядов, включает также главные компоненты. В связи с этим оценивание FAVAR осуществляется в два этапа: на первом этапе оцениваются главные компоненты, а на втором производится оценивание и прогнозирование модели. Теперь рассмотрим особенности указанных этапов более подробно. Выше было указано, что главные компоненты можно рассчитать несколькими способами. В эконометрической литературе выделяют три подхода для расчета динамики главных компонент (Barhoumi, Darne, & Ferrara 2009). Первый и наиболее простой с точки зрения вычислительного алгоритма подход принято называть статическим алгоритмом

выделения главных компонент (Stock & Watson 2002). Другие два подхода являются динамическими алгоритмами. Первый алгоритм был предложен в работе Forni, Hallin, Lippi & Reichlin (2005), а второй — в работе Doz, Gianonne & Reichlin (2011, 2012). Различие между последними двумя подходами в основном состоит в том, что первый подход для выделения главных компонент применяет элементы спектрального анализа временных рядов, тогда как второй основан на применении многомерного фильтра Кальмана. В данной работе для выделения главных компонент мы применяем статический алгоритм Stock & Watson (2002) и динамический алгоритм Doz, Gianonne & Reichlin (2011, 2012). Представим вычислительные аспекты указанных алгоритмов выделения главных компонент более подробно.

2.1 Статический алгоритм выделения главных компонент

Пусть имеются N стационарных временных рядов $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{Nt})'$, $t = 1, 2, \dots, T$. На основе x_t можно рассчитать выборочную ковариационную матрицу:

$$\hat{\Gamma}_0 = \sum_{i=1}^T x_i x_i'. \quad (4)$$

Задача состоит в том, чтобы найти $r \ll N$ таких линейных комбинаций $f_{i,t} = \hat{s}_i' x_t$, чтобы максимизировать дисперсию главных компонент $\hat{s}_i' \Gamma_0 \hat{s}_i$. Вводя обычное ограничение $\hat{s}_i' \hat{s}_i = 1$ и оптимизируя лагранжиан $L = \hat{s}_i' \Gamma_0 \hat{s}_i - \hat{\mu}_i (\hat{s}_i' \hat{s}_i - 1)$ относительно \hat{s}_i , приходим к следующему матричному тождеству: $\Gamma_0 \hat{s}_i = \hat{\mu}_i \hat{s}_i$ (Schumacher 2007).

Таким образом, видим, что поиск первых r линейных комбинаций $f_{i,t} = \hat{s}_i' x_t$, $i = 1, 2, \dots, r$, где $r \ll N$, сводится к задаче отыскания собственных значений и собственных векторов ковариационной матрицы $\hat{\Gamma}_0$. В нашем случае диагональная матрица собственных значений представлена $\hat{\mu}_i$, которым соответствует \hat{s}_i собственных вектора. Собственные векторы в свою очередь являются весовыми коэффициентами для расчета динамики главных компонент. Таким образом, статический подход выделения главных компонент сводится к алгебраической проблеме поиска собственных значений и собственных векторов ковариационной (или корреляционной) матрицы исходных переменных.

2.2 Динамический алгоритм выделения главных компонент

Динамическая факторная модель может быть представлена в пространстве состояний (см. Цыплаков 2011) следующим образом:

$$\begin{aligned} y_t &= \Lambda f_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim i.i.d. N(0, R), \\ f_t &= A_1 f_{t-1} + A_2 f_{t-2} + \dots + A_p f_{t-p} + u_t, \quad u_t \sim i.i.d. N(0, Q). \end{aligned} \quad (5)$$

В указанной модели ненаблюдаемой компонентой, динамику которой мы и хотим оценить, применяя фильтр Кальмана, является переменная f_t . Для этого в первую очередь необходимо оценить элементы матриц Λ и F . Заметим, что Λ — матрица факторных нагрузок, а F — вектор значений главных компонент, когда $t = 1$. Другими словами, в качестве исходных значений мы используем первую строку главных компонент, полученных статическим алгоритмом. Исходная дисперсионная матрица рассчитывается с помощью выделенных статическим алгоритмом главных компонент. Относительно элементов матрицы A следует отметить, что они получаются на основе оценивания стандартной модели векторной авторегрессии с помощью традиционного метода наименьших квадратов. Матрица Q — дисперсионная матрица остатков векторной авторегрессии $F_t = A(L)F_t + \epsilon_t$. Элементы матрицы R оцениваются как $y_t - \hat{\Lambda} \hat{f}_t = \hat{\epsilon}_t$. Итак, имея исходные значения F , а также соответствующие матрицы

Λ, A, R, Q , можно оценить динамику F с помощью известного фильтра Кальмана, который имеет следующие алгоритмические шаги:¹

Алгоритм фильтра Кальмана следующий:

$$\begin{aligned} L &= (\Lambda_t P_{t|t-1} \Lambda_t' + R_t)^{-1}, \\ f_{t|t} &= f_{t|t-1} + P_{t|t-1} \Lambda_t' L (y_t - \Lambda_t f_{t|t-1}), \\ P_{t|t} &= P_{t|t-1} - P_{t|t-1} \Lambda_t' L \Lambda_t P_{t|t-1}, \\ f_{t+1|t} &= A f_{t|t} + t|t + K_t (y_t - \Lambda_t f_{t|t}), \\ K_t &= A P_{t|t} \Lambda_t' L, \\ P_{t+1|t} &= A P_{t|t} A' + Q. \end{aligned} \tag{6}$$

Алгоритм сглаживания ненаблюдаемой компоненты имеет вид

$$\begin{aligned} f_{t|T} &= f_{t|t} + P_{t|t} A' P_{t+1|t}^{-1} (f_{t|T+1} - f_{t+1|t}), \\ P_{t|T} &= P_{t|t} + P_{t|t} A' P_{t+1|t}^{-1} (P_{t|T+1} - P_{t+1|t}) (P_{t|t} A' P_{t+1|t}^{-1})'. \end{aligned} \tag{7}$$

Что касается алгоритма квази-максимального правдоподобия, то в основе этого алгоритма лежит двухшаговый алгоритм фильтра Кальмана. Основное отличие заключается в том, что алгоритм квази-максимального правдоподобия является итеративной процедурой. Здесь двухшаговый алгоритм Кальмана применяется многократно до тех пор, пока динамика выделенных главных компонент не перестанет изменяться.

Итак, имея рассчитанную по вышеизложенным алгоритмам динамику главных компонент, можно перейти ко второму этапу оценивания факторно-расширенной модели векторной авторегрессии. Для этого в первую очередь отметим, что модель FAVAR — стандартная модель векторной авторегрессии, где кроме небольшого количества основных временных рядов также включается динамика рассчитанных главных компонент. Следовательно, следуя Bernanke, Boivin & Elias (2005), FAVAR модель можно представить как

$$\begin{vmatrix} Y_t \\ F_t \end{vmatrix} = A_1 \begin{vmatrix} Y_{t-1} \\ F_{t-1} \end{vmatrix} + A_2 \begin{vmatrix} Y_{t-2} \\ F_{t-2} \end{vmatrix} + \dots + A_p \begin{vmatrix} Y_{t-p} \\ F_{t-p} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_t \\ u_t \end{vmatrix}, \tag{8}$$

где Y_t — вектор основных макроэкономических временных рядов, F_t — вектор главных компонент, динамика которых рассчитывается по вышеизложенным алгоритмам, A_1, A_2, \dots, A_p — матрицы оцененных параметров. В модели FAVAR оценивание параметров может производиться с помощью традиционного метода наименьших квадратов или по Байесовскому алгоритму, v_t и u_t — остаточная компонента FAVAR модели с нулевым математическим ожиданием и с диагональной дисперсионной матрицей, соответственно Q и V .

3 Данные

Для оценивания моделей VAR и BVAR были использованы три основных макроэкономических показателя: темп роста реального ВВП, темп инфляции и краткосрочная номинальная процентная ставка по депозитам в национальной валюте. Выбор указанных макроэкономических показателей обусловлен следующими причинами: во-первых, существуют различные эмпирические исследования, где оценивание VAR и BVAR моделей производится именно по этим трем основным макроэкономическим показателям (например, Gupta & Kabundi 2009a, 2009b); во-вторых, мы хотели бы обеспечить сопоставимость наших результатов вневыборочного прогноза с результатами аналогичных работ. С другой стороны, данная работа не имеет целью построения структурной эконометрической модели. Простая модель векторной авторегрессии нами рассматривается как эталонная модель, с которой мы будем сравнивать другие модели.

¹Вычислительные подробности содержатся в MATLAB-файлах на сайте homepages.ulb.ac.be/~dgiannon/.

Указанные макроэкономические ряды были подвергнуты первичной статистической обработке. Наша выборка включает квартальные временные ряды с 1996:Q2 по 2014:Q4. Останемся более подробно на принципах первичной обработки.

Первичная статистическая обработка динамики реального ВВП (в среднегодовых ценах 2005 г.) включает следующие шаги. Во-первых, абсолютные величины реального ВВП были прологарифмированы, а затем сезонно сглажены. Во-вторых, используя сезонно сглаженные величины, были рассчитаны первые разности, которые практически показывают процентное изменение динамики реального ВВП по сравнению с предыдущим кварталом. По такой же схеме мы осуществляем первичную статистическую обработку динамики индекса потребительских цен (ИПЦ), который служит индексом инфляции. Отметим, что ИПЦ является цепным индексом, который необходимо трансформировать в базисный ИПЦ. После этого применяем все аналогичные шаги, т.е. осуществляем логарифмирование и сезонное сглаживание, потом берем первые разности. Обработанные по указанной схеме временные ряды реального ВВП и индекса цен приведены на рисунках 1 и 2.

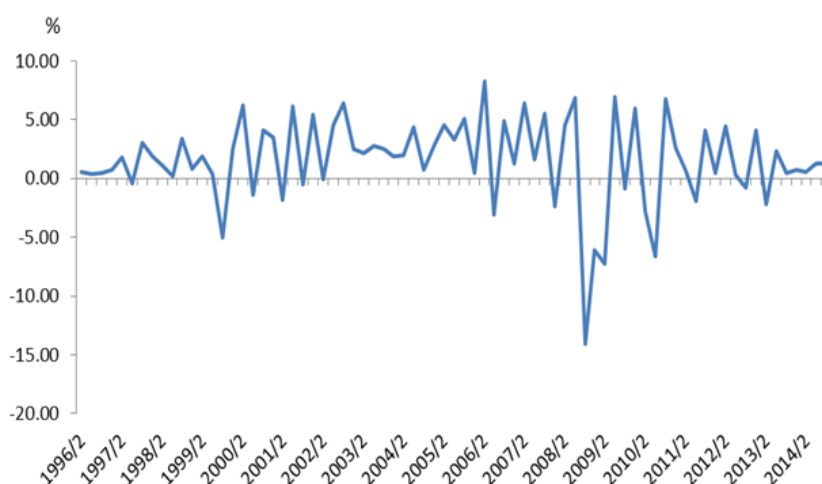


Рис. 1: Темп роста реального ВВП (в %-х к предыдущему кварталу).

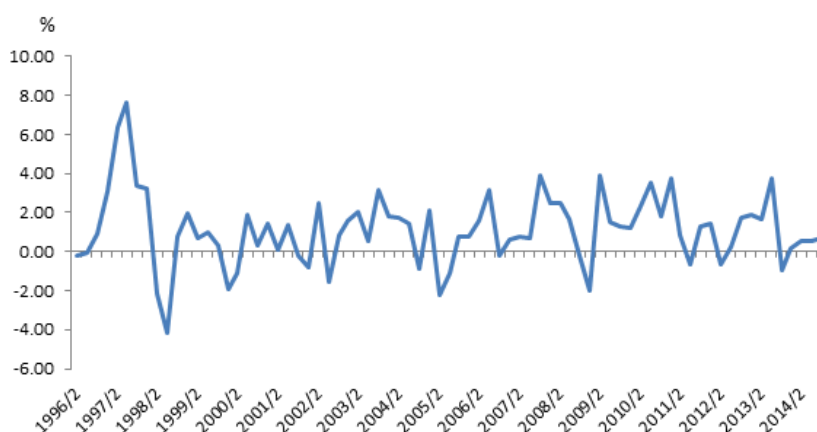


Рис. 2: Темп инфляции (в %-х к предыдущему кварталу).

Относительно временного ряда краткосрочной номинальной процентной ставки по депозитам в национальной валюте можно отметить, что первичная обработка этого показателя

существенно отличается от предыдущих двух показателей. Здесь мы просто берем первые разности (см. Рис. 3).

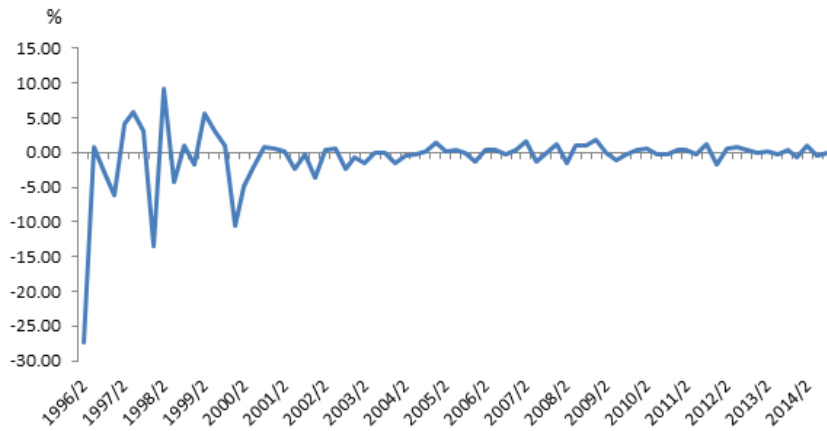


Рис. 3: Номинальная процентная ставка по депозитам в национальной валюте (от 15 дней до 1 года) (изменение в %-х пунктах).

Относительно оценивания неизвестных параметров модели FAVAR следует отметить, что здесь кроме вышеуказанных трех переменных дополнительно мы включаем динамику главных компонент. Для выделения динамики главных компонент были отобраны различные макроэкономические показатели из реального сектора экономики, денежно-кредитного и финансового секторов экономики, мировые цены на топливно-энергетические и сырьевые ресурсы. Наименование и некоторые другие характеристики отобранных временных рядов представлены в таблице на стр. 33.² Отметим, что все используемые в данной работе временные ряды были отобраны из следующих источников: внутренние базы данных Центрального Банка Армении, свободно распространяемые Национальной статистической службой Армении базы данных, а также базы данных с интернет-сайта www.indexmundi.com. Следует также отметить, что все расчеты, связанные с оцениванием параметров моделей, а также оцениванием динамики главных компонент, были осуществлены с помощью специально разработанного для этой цели статистического пакета, который можно бесплатно скачать с сайта www.forecasting.somee.com. Применяя указанный пакет, все вычисления, связанные с вышеизложенными моделями, можно проделать непосредственно в среде Microsoft Excel.

4 Проектирование эксперимента

Для выявления прогнозирующих свойств вышеизложенных моделей векторной авторегрессии нами был проведен регрессионный эксперимент, а именно рекурсивная схема регрессии (Schumacher 2007). С этой целью вся выборка была разбита на две подвыборки. В первую подвыборку включены наблюдения с 1996:Q2 по 2009:Q2 (в целом 53 наблюдений для каждого временного ряда в отдельности), а вторая выборка включает наблюдения с 2009:Q3 по 2014:Q4 (в целом 22 наблюдений).

Рекурсивная схема предполагает следующие шаги. Основываясь на фактических временных рядах с 1996:Q2 по 2009:Q2, мы осуществляем оценивание моделей. Затем производим прогнозы для 1–4 временных такта вперед (2009:Q3, 2009:Q4, 2010:Q1, 2010:Q2). Затем мы увеличиваем длину выборки на одно наблюдение, т.е. до 1996:Q2–2009:Q3, и заново оцениваем параметры и прогнозируем модель для 1–4 временных такта вперед (2009:Q4, 2010:Q1,

² Δ означает, что взяты первые разности, а \ln — что ряд прологарифмирован.

Список использованных временных рядов			
№	Название показателя	Трансформация	Сезонное сглаживание
1	Добавленная стоимость в промышленности (в среднегодовых ценах 2005 года), млн. драм	$\Delta \ln$	Да
2	Добавленная стоимость в сельском хозяйстве (в среднегодовых ценах 2005 года), млн. драм	$\Delta \ln$	Да
3	Добавленная стоимость в строительстве (в среднегодовых ценах 2005 года), млн. драм	$\Delta \ln$	Да
4	Добавленная стоимость в сфере услуг (в среднегодовых ценах 2005 года), млн. драм	$\Delta \ln$	Да
5	Индекс цен промышленного производства (в %-х к предыдущему кварталу)	$\Delta \ln$	Нет
6	Индекс цен в строительстве (в %-х к предыдущему кварталу)	$\Delta \ln$	Нет
7	Тарифы на транспортные перевозки (в %-х к предыдущему кварталу)	$\Delta \ln$	Нет
8	Наличные деньги вне банковской системы, млн. драм	$\Delta \ln$	Да
9	Денежная база, млн. драм	$\Delta \ln$	Да
10	Денежная масса, млн. драм	$\Delta \ln$	Да
11	Кредиты, предоставленные экономике (с начисленными процентами), млн. драм	$\Delta \ln$	Нет
12	Депозиты в банковской системе (без начисленных процентов), млн. драм	$\Delta \ln$	Нет
13	Процентная ставка привлеченных средств в национальной валюте от предприятий (от 15 дней до 1 года), %	Δ	Нет
14	Процентная ставка привлеченных средств в национальной валюте от домашних хозяйств (от 15 дней до 1 года), %	Δ	Нет
15	Процентная ставка предоставленных кредитов предприятиям в национальной валюте (от 15 дней до 1 года), %	Δ	Нет
16	Процентная ставка предоставленных кредитов домашним хозяйствам в национальной валюте (от 15 дней до 1 года), %	Δ	Нет
17	Цены на зерно, долларов США за одну тонну	$\Delta \ln$	Нет
18	Цена на Российский природный газ, долларов США за миллион метрических Британских тепловых единиц	$\Delta \ln$	Нет
19	Цена на бензин, долларов США за галлон	$\Delta \ln$	Нет
20	Цена на нефть марки Brent, долларов США за баррель	$\Delta \ln$	Нет
21	Индекс цен на сельскохозяйственное сырье, %	$\Delta \ln$	Нет
22	Индекс цен на потребительские товары, %	$\Delta \ln$	Нет
23	Индекс цен на продовольственные товары, %	$\Delta \ln$	Нет
24	Индекс цен на промышленные товары, %	$\Delta \ln$	Нет
25	Индекс цен на промышленную продукцию, %	$\Delta \ln$	Нет

2010:Q2, 2010Q3). Так и продолжаем, пока выборка не достигнет периода 1996:Q2–2013:Q4. Далее, применяя выборку 1996:Q2–2014:Q1, мы можем сделать прогноз для 1–3 временных тактов вперед (2014:Q2, 2014:Q3 и 2014:Q4). Затем мы увеличиваем длину выборки на одно наблюдение и делаем прогноз для 1–2 временных тактов вперед. Действуя таким образом, в целом мы будем иметь 22 точечных прогнозов для 1-го временного такта вперед, 21 точечных прогноза для 2-х временных тактов вперед и т.д. Самым меньшим количеством (19 точечных прогнозов) будут прогнозы для 4-х временных тактов вперед.

Кроме рекурсивной схемы регрессионного эксперимента существует, также скользящая схема регрессии (Schumacher 2007). Однако в данной работе мы предпочтению отдали применению рекурсивной регрессии, поскольку ее преимущество состоит в том, что размер выборки постоянно увеличивается, и мы можем оценивать модель по максимально возможной выборке. На наш взгляд, это очень важное преимущество, особенно тогда, когда временные ряды сравнительно короткие.

Итак, полученные по рекурсивной схеме регрессионного эксперимента точечные прогнозы мы сравниваем с фактическими величинами интересующих нас временных рядов (темп роста реального ВВП, тем инфляции, номинальная краткосрочная процентная ставка). Так, например, для 1-го временного такта берем прогнозные значения с 2009:Q3–2014:Q4 и сравниваем с фактическими величинами для этого же временного промежутка. Аналогичным образом поступаем для 2-х, 3-х и 4-х временных тактов вперед. В результате сравнений мы рассчитываем показатель среднеквадратичного отклонения, который рассчитывается по следующей формуле:

$$RMSE_{ih} = \sqrt{\frac{1}{T^* - (h - 1)} \sum_{t=1}^{T^* - (h - 1)} (\hat{y}_{i,t} - y_{i,t})^2},$$

где $RMSE_{it}$ — корень из среднеквадратичного отклонения для i -го временного ряда в момент времени t , $y_{i,t}$ — фактическое значение для i -го временного ряда в момент времени t , $\hat{y}_{i,t}$ — прогнозное значение для i -го временного ряда в момент времени t .

5 Результаты прогнозирования

Изложенная в предыдущем разделе схема регрессионного эксперимента осуществляется по следующим конкурирующим моделям векторной авторегрессии.

1. Модель векторной авторегрессии без ограничений (VAR).
2. Модель Байесовской векторной авторегрессии (BVAR).
3. Модель факторно-расширенной векторной авторегрессии, где главные компоненты рассчитываются по статическому (Stock & Watson 2002) и динамическому (во временной области) (Doz, Gianonne & Reichlin 2011, 2012) алгоритмам.

Имея в виду, что прогнозы макроэкономических показателей осуществляются с помощью моделей векторной авторегрессии, возникает необходимость решения двух проблем. Во-первых, необходимо решить вопрос о количестве лагов в моделях векторной авторегрессии, и во-вторых, необходимо решить вопрос о количестве статических и динамических главных компонент.

Выбор количества лагов в моделях векторной авторегрессии решается более экспертным путем, чем с помощью применения традиционных статистических тестов. К тому же, как показывает практика, очень часто статистические тесты, касающиеся выбора количества лагов, как правило дают противоречивые результаты, что для прикладных исследователей осложняет процесс принятия решения о количестве лагов. Учитывая, что наши временные ряды имеют квартальную динамику и что наша цель состоит в генерации квартальных прогнозов, на наш взгляд целесообразно, чтобы для оценивания моделей векторной авторегрессии

применялись временные лаги включительно до четвертого квартала. Основываясь на этом, мы отдельно оцениваем модели векторной авторегрессии для одного лага, затем для двух лагов, трех лагов и наконец для четырех лагов. Такой подход к тому же позволит проверить устойчивость полученных прогнозов для различных лаговых моделей.

Что касается выбора количества динамических и статических факторов, включаемых в модель факторно-расширенной векторной авторегрессии, то здесь количество статических факторов (или главных компонент) было выделено, основываясь на визуальном анализе графика собственных значений корреляционной матрицы исходных переменных (см. Приложение 1). Динамика собственных значений корреляционной матрицы дополнительных исходных переменных приведена на Рис. 4.

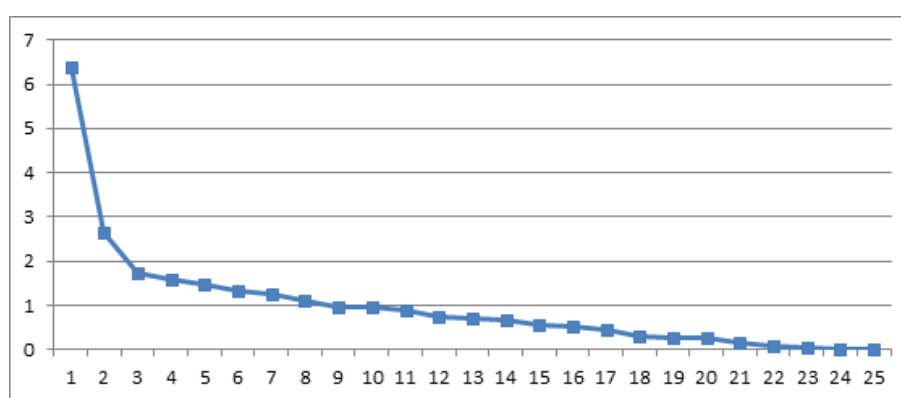


Рис. 4: Собственные значения корреляционной матрицы исходных переменных

Из приведенного графика можно заметить, что разница между двумя последовательными собственными значениями заметно ослабевает после третьего собственного значения. Следовательно, для оценивания FAVAR моделей в анализ целесообразно включить первые три фактора, которые вместе объясняют вариацию исходных временных рядов примерно на 43,1%. Что касается количества динамических факторов, то их количество в нашем случае может варьироваться от одного до трех, так как известно, что количество динамических факторов может быть меньше или равно количеству статических факторов.³ Итак, для нашего исследования мы последовательно применяли следующие комбинации динамических и статических факторов: один динамический и три статических фактора, два динамических и три статических фактора и, наконец, три динамических и три статических фактора. Такая комбинация динамических и статических факторов применялась для оценивания моделей FAVAR_Two_Step и FAVAR_QML, а для модели FAVAR_SW применялись три статических фактора. Отметим, что расчеты осуществлялись по всем возможным комбинациям статических и динамических факторов. Однако в нижеприведенных таблицах представлены результаты только по тем комбинациям статических и динамических факторов, которые обеспечивают минимальное значение средней величины *RMSE*.

В таблицах 1–3 представлены расчеты показателей *RMSE* для рекурсивной схемы регрессионного эксперимента.

³См. MATLAB файлы с сайта homepages.ulb.ac.be/~dgiannon/.

Таблица 1: *RMSE* для реального темпа роста ВВП⁴

Количество лагов	Модель прогнозирования	Горизонт прогноза				Средняя величина <i>RMSE</i>
		1	2	3	4	
1 лаг	VAR	3,27	3,19	3,21	3,14	3,20
	BVAR ($w = 0, 3; d = 1$) ⁵	3,76	3,28	3,32	3,28	3,41
	FAVAR_SW (3) ⁶	3,07	3,45	3,22	3,12	3,22
	FAVAR_Two_Step (1,3) ⁷	3,20	3,42	3,07	3,08	3,19
	FAVAR_QML (1,3)	3,09	3,35	3,13	3,11	3,17
2 лага	VAR	3,64	3,33	3,31	3,17	3,36
	BVAR ($w = 0, 3; d = 1$)	3,94	3,30	3,38	3,20	3,46
	FAVAR_SW (3)	3,41	3,89	3,37	3,29	3,49
	FAVAR_Two_Step (2,3)	3,64	3,84	3,15	3,28	3,48
	FAVAR_QML (2,3)	3,51	3,47	3,04	3,15	3,29
3 лага	VAR	4,23	3,38	3,65	2,80	3,51
	BVAR ($w = 0, 3; d = 1$)	4,56	3,41	3,70	2,91	3,64
	FAVAR_SW (3)	3,80	4,02	3,16	3,29	3,57
	FAVAR_Two_Step (3,3)	4,01	4,01	3,34	3,47	3,71
	FAVAR_QML (3,3)	4,33	4,53	3,40	3,18	3,86
4 лага	VAR	4,26	3,30	3,58	3,11	3,56
	BVAR ($w = 0, 3; d = 1$)	4,72	3,33	3,78	3,11	3,74
	FAVAR_SW (3)	4,59	4,56	3,85	3,70	4,17
	FAVAR_Two_Step (3,3)	4,73	4,75	3,69	3,60	4,19
	FAVAR_QML (3,3)	5,26	5,68	3,95	3,66	4,64

Из таблицы 1 можно увидеть, что для одного и двух лаговых моделей векторной авторегрессии величины *RMSE* достигают своего минимального значения в случае прогнозов по модели FAVAR_QML. Для трех- и четырехлаговых моделей векторной авторегрессии величины *RMSE* достигают своего минимума в случае прогнозирования по традиционной модели VAR без ограничений.

Из таблицы 2 можно заметить, что FAVAR_QML модель дает минимальные значения величины *RMSE* в случае двухлаговой модели. Для трех лагов минимальный прогноз получаем в случае применения стандартной модели VAR, а для одного и четырех лагов преимущество традиционной модели по сравнению с нетрадиционными моделями явно не наблюдаем.

Из таблицы 3 можно увидеть, что в основном наилучшие прогнозы получаем с помощью BVAR и FAVAR_QML моделей.

Таким образом на основе вышеизложенного анализа можно сделать вывод, что наибо-

⁴FAVAR_SW – модель FAVAR в котором главные компоненты рассчитаны по статическому алгоритму (Stock, Watson, 2002), FAVAR_Two_Step – главные компоненты рассчитаны по динамическому алгоритму фильтра Кальмана, FAVAR_QML – главные компоненты рассчитаны по динамическому алгоритму квази-максимального правдоподобия.

⁵ $w = 0, 3$ и $d = 1$, коэффициенты которые применяются для оценивания модели BVAR, первый коэффициент применяется к матрице стандартных отклонений априорных параметров модели, а второй коэффициент применяется к лаговым значениям модели. Следуя Gupta & Kabundi (2009b) для оценивания параметров Байесовской модели, последовательно применялись $w = 0, 1; 0, 2; 0, 3$, $d = 1, 2$.

⁶Приведенная в скобках цифра показывает, что для оценивания модели FAVAR применялись дополнительно три статических фактора, рассчитанных по методу главных компонент.

⁷Приведенные в скобках цифры показывают количество динамических и статических факторов. Так, например, запись FAVAR_Two_Step (1,3) следует понимать так, что для оценки модели FAVAR_Two_Step применялись один динамический и три статических фактора.

Таблица 2: *RMSE* для темпа инфляции

Количество лагов	Модель прогнозирования	Горизонт прогноза				Средняя величина <i>RMSE</i>
		1	2	3	4	
1 лаг	VAR	1,36	1,40	1,41	1,44	1,40
	BVAR ($w = 0, 3; d = 1$)	1,38	1,41	1,41	1,43	1,41
	FAVAR_SW (3)	1,41	1,41	1,40	1,43	1,41
	FAVAR_Two_Step (3,3)	1,42	1,41	1,37	1,43	1,41
	FAVAR_QML (3,3)	1,41	1,41	1,37	1,42	1,40
2 лага	VAR	1,55	1,47	1,47	1,48	1,50
	BVAR ($w = 0, 3; d = 2$)	1,57	1,48	1,48	1,49	1,51
	FAVAR_SW (3)	1,79	1,71	1,58	1,68	1,69
	FAVAR_Two_Step (3,3)	1,70	1,62	1,56	1,67	1,64
	FAVAR_QML (3,3)	1,49	1,35	1,45	1,57	1,47
3 лага	VAR	1,70	1,63	1,63	1,50	1,62
	BVAR ($w = 0, 3; d = 1$)	1,72	1,65	1,64	1,52	1,63
	FAVAR_SW (3)	1,85	1,67	1,69	1,59	1,70
	FAVAR_Two_Step (2,3)	1,77	1,68	1,81	1,68	1,73
	FAVAR_QML (2,3)	1,70	1,59	1,70	1,61	1,64
4 лага	VAR	1,47	1,46	1,56	1,41	1,48
	BVAR ($w = 0, 3; d = 1$)	1,48	1,46	1,56	1,41	1,48
	FAVAR_SW (3)	1,68	1,36	1,45	1,55	1,51
	FAVAR_Two_Step (3,3)	1,76	1,51	1,56	1,63	1,62
	FAVAR_QML (2,3)	1,82	1,57	1,55	1,84	1,69

лее предпочтительными моделями для краткосрочного прогнозирования динамики основных макроэкономических показателей в Армении являются прогнозы по моделям FAVAR и BVAR. Это обусловлено тем, что в большинстве проделанных экспериментов количество минимальных значений *RMSE*, полученных по нетрадиционным моделям BVAR и FAVAR, больше, чем количество минимальных значений, полученных по стандартной модели VAR без ограничений (из 12-ти рассмотренных сценариев только в 3-х мы наблюдаем явное преимущество традиционной модели векторной авторегрессии). Это еще раз подтверждает преобладающее в эконометрической литературе мнение, согласно которому для краткосрочного прогноза предпочтительнее применять модель BVAR или модель векторной авторегрессии с дополнительными объясняющими переменными.

6 Заключение

Прогнозирование имеет важное значение для проведения денежно-кредитной политики центрального банка. Органы денежно-кредитной политики должны знать, что может произойти с динамикой основных макроэкономических показателей, чтобы сделать соответствующие корректировки ключевых процентных ставок. В этом отношении особо актуальным становится изучение различных моделей прогнозирования и их эффективное применения для практических целей.

В данной работе рассматриваются основные модели векторной авторегрессии для краткосрочного прогнозирования макроэкономических показателей. В частности, рассматриваются модель векторной авторегрессии без ограничений, Байесовская модель векторной авторегрессии и факторно-расширенная модель векторной авторегрессии. Основной целью данного

Таблица 3: *RMSE* для номинальной процентной ставки

Количество лагов	Модель прогнозирования	Горизонт прогноза				Средняя величина <i>RMSE</i>
		1	2	3	4	
1 лаг	VAR	1,07	0,76	0,75	0,80	0,84
	BVAR ($w = 0, 3; d = 1$)	1,03	0,79	0,75	0,80	0,84
	FAVAR_SW (3)	1,59	0,87	0,70	0,79	0,99
	FAVAR_Two_Step (1,3)	1,21	0,80	0,78	0,78	0,89
	FAVAR_QML (3,3)	0,98	0,79	0,72	0,79	0,82
2 лага	VAR	1,25	0,94	0,90	0,78	0,97
	BVAR ($w = 0, 1; d = 1$)	1,01	0,89	0,66	0,69	0,81
	FAVAR_SW (3)	1,84	1,40	0,94	0,78	1,24
	FAVAR_Two_Step (1,3)	1,53	1,35	0,81	0,88	1,14
	FAVAR_QML (3,3)	1,54	1,30	1,02	0,96	1,21
3 лага	VAR	1,35	0,90	0,77	0,80	0,95
	BVAR ($w = 0, 3; d = 1$)	1,25	0,83	0,72	0,76	0,89
	FAVAR_SW (3)	1,76	1,77	1,53	1,15	1,56
	FAVAR_Two_Step (3,3)	1,58	1,88	1,55	0,99	1,50
	FAVAR_QML (3,3)	1,94	2,01	1,52	0,84	1,58
4 лага	VAR	1,77	1,40	0,75	1,12	1,26
	BVAR ($w = 0, 3; d = 1$)	1,58	1,22	0,71	1,10	1,15
	FAVAR_SW (3)	2,53	2,60	1,53	1,20	1,96
	FAVAR_Two_Step (3,3)	2,25	2,63	1,73	1,33	1,98
	FAVAR_QML (3,3)	2,30	2,41	1,41	1,27	1,85

исследования является поиск наиболее приемлемой модели для осуществления краткосрочных прогнозов в Центральном Банке Армении. Для поиска наиболее подходящей модели проводим рекурсивный регрессионный эксперимент. В результате проведения экспериментов рассчитываются значения показателя RMSE. На основе рассчитанных величин RMSE мы делаем вывод, что для краткосрочного прогнозирования целесообразнее применять нетрадиционные схемы векторной авторегрессии, в частности модели BVAR и FAVAR. Такой выбор объясняется тем, что в большинстве регрессионных экспериментов (58% от общего количества случаев) нетрадиционные модели обеспечивают более точные прогнозы, чем прогнозы по стандартной модели VAR. Таким образом, практические расчеты на основе фактических макроэкономических временных рядов Армении дополнительный раз подтверждают то преобладающее мнение, согласно которому нетрадиционные модели более приемлемы для краткосрочного прогноза, чем традиционная модель в смысле минимизации среднеквадратичной ошибки прогноза.

Список литературы

- Микушева, А. (2014). Оценивание динамических стохастических моделей общего равновесия. *Квантиль* 12, 1–21.
- Цыплаков, А. (2011). Введение в моделирование в пространстве состояний. *Квантиль* 9, 1–24.
- Barhoumi, K., Darne, O. & L. Ferrara (2009). Are disaggregated data useful for factor analysis in forecasting French GDP? Documents de Travail 232, Banque de France.
- Bernanke, B., J. Boivin & P. Elias (2005). Measuring the effects of monetary policy: A factor-augmented vector autoregressive (FAVAR) approach. *Quarterly Journal of Economics* 120, 387–422.

- Canova, F. (2007). *Methods for Applied Macroeconomic Research*. Princeton University Press.
- Doz, C., Gianonne D. & L. Reichlin (2011). A two-step estimator for large approximate dynamic factor models based on Kalman filtering. *Journal of Econometrics* 164, 188–205.
- Doz, C., Gianonne D. & L. Reichlin (2012). A quasi-maximum likelihood approach for large approximate dynamic factor models. *Review of Economics and Statistics* 94, 1014–1024.
- Forni, M., Hallin, M., Lippi, M. & L. Reichlin (2005). The generalized dynamic factor Model: one-sided estimation and forecasting. *Journal of American Statistical Association* 100, 830–840.
- Gupta, R. & A. Kabundi (2009a). A large factor model for forecasting macroeconomic variables in South Africa. Working Paper 137, University of Cape Town.
- Gupta, R. & A. Kabundi (2009b). Forecasting macroeconomic variables using large scale datasets: Dynamic factor model versus large-scale BVAR's. Working Paper 143, University of Cape Town.
- Hamilton, J. (1994). *Time series analysis*. Princeton University Press.
- Litterman, R. (1981). A Bayesian procedure for forecasting with vector autoregressions. Working Paper, Federal Bank of Minneapolis.
- Schumacher, C. (2007). Forecasting German GDP using alternative factor models based on large datasets. *Journal of Forecasting* 26, 271–302.
- Stock, J. & M. Watson (2002). Macroeconomic forecasting using diffusion indexes. *Journal of Business & Economic Statistics* 20, 147–162.

Alternative models for forecasting the key macroeconomic variables in Armenia

Karen Poghosyan

Central Bank of Armenia, Yerevan, Armenia

We evaluate the forecasting performance of three competing models for short-term macroeconomic forecasting: the traditional unrestricted VAR, Bayesian VAR, and Factor Augmented VAR. Using quarterly Armenian macroeconomic variables from 1996 to 2014, we estimate parameters of the three models. Based on the out-of-sample root mean squared error criterion we conclude on the most relevant model.

Keywords: vector autoregression, principal components, Bayesian estimation, macroeconomic indicators, Armenia

JEL Classification: C11, C13, C52, C53

Анализ трансмиссионного механизма монетарной политики Республики Беларусь: байесовский подход*

Александра Безбородова[†]

Национальный банк РБ, Минск, Беларусь

Юрий Михалёнок[‡]

Национальный банк РБ, Минск, Беларусь

Настоящее исследование посвящено эконометрическому анализу трех основных каналов трансмиссионного механизма монетарной политики Республики Беларусь (каналу обменного курса, процентному каналу и кредитному каналу) на основе векторных авторегрессионных моделей, построенных на эмпирических данных за период с 2003 по 2014 гг. и реализованных с помощью байесовского подхода. Полученные результаты свидетельствуют о работоспособности трех рассматриваемых каналов. Наименьший лаг реакции (один квартал) целевых показателей (ВВП и инфляции) наблюдается на шок денежного предложения. Одной из особенностей оцененного передаточного механизма монетарной политики РБ является отсутствие реакции экспорта на шок со стороны обменного курса белорусского рубля. *Ключевые слова:* Республика Беларусь, трансмиссионный механизм монетарной политики, векторные авторегрессионные модели, байесовский подход
Классификация JEL: C11, E47, E52, E58

1 Введение

Существует достаточно большое количество исследований, посвященных изучению трансмиссионного механизма монетарной политики различных стран. В большей части данных работ проводится оценка каналов передаточного механизма развитых европейских стран и США (Christiano, Eichenbaum & Evans 1988). Согласно результатам работ жесткая монетарная политика, выражающаяся в росте процентных ставок, приводит к сокращению объема денежной массы и снижению совокупного выпуска. В работе Peetsman & Smets (2001) было доказано, что ужесточение денежно-кредитной политики в Еврозоне приводит к укреплению реального обменного курса и сокращению выпуска. Так, на основе исследований развитых стран был достигнут определенный консенсус, каким образом функционирует трансмиссионный механизм денежно-кредитной политики. Однако следует отметить, что изменения монетарной политики имеют устойчивое, но не постоянное влияние на совокупный выпуск. Также возникает вопрос, сохраняются ли особенности передаточного механизма монетарной политики развитых стран в условиях развивающихся экономик.

В исследованиях, посвященных анализу трансмиссионного механизма монетарной политики стран Центральной и Восточной Европы, устанавливается слабая реакция промежуточных переменных передаточного механизма на изменения монетарной политики и, более того, незначимое воздействие промежуточных переменных монетарного механизма на целевые показатели, такие как ВВП и его темпы роста. Экономисты объясняют данный факт институциональными условиями. Прежде всего, это низкая степень развития банковского сектора

*Цитировать как: Безбородова, Александра & Юрий Михалёнок (2015). «Анализ трансмиссионного механизма монетарной политики Республики Беларусь: байесовский подход», Квантиль, №13, стр. 41–61. Citation: Bezborodova, Alexandra & Yury Mihalенок (2015). “Analysis of the monetary policy transmission mechanism in the Republic of Belarus: Bayesian approach”, Quantile, No. 13, pp. 41–61.

[†]Адрес: 220008, Минск, проспект Независимости, дом 20. Электронная почта: aleksandra.bez@yandex.ru

[‡]Адрес: 220008, Минск, проспект Независимости, дом 20. Электронная почта: mihalенок.yuri@gmail.com

и финансового посредничества, отсутствие конкуренции в банковском секторе, частые изменения правовых аспектов финансовой деятельности. При этом многие авторы утверждают, что за последние годы значимость каналов трансмиссионного механизма монетарной политики развивающихся стран повышается (Ganev, Molnar, Rybinski & Wozniak 2002). Одной из стран, относящейся к описываемой группе, является Республика Беларусь. Отличительными чертами экономики данной страны является низкая степень развития финансового рынка, высокая доля государственного сектора, высокая степень долларизации финансовых активов, подверженность макроэкономическим шокам. Данные отличительные черты ставят под сомнение работоспособность каналов трансмиссионного механизма и обуславливают актуальность оценки передаточного механизма денежно-кредитной политики РБ на современных эмпирических данных. Модели каналов помогут установить степень влияния монетарной политики на реальный сектор и сформулировать определенные предложения по ее корректировке. Одними из основных вопросов данного исследования являются:

- Степень реакции реального сектора на изменения монетарной политики РБ;
- Скорость реакции выпуска и цен на изменения монетарной политики РБ и продолжительность данной реакции;
- Значимость каждого отдельного канала трансмиссионного механизма денежно-кредитной политики РБ.

Модель трансмиссионного механизма будет представлять собой не только количественную оценку взаимосвязей основных макроэкономических переменных, установленную на эмпирических данных, но и основываться на экономической теории, а также иметь практическое применение в процессе выработки монетарной политики. Для реализации поставленной задачи будут использоваться байесовские векторные авторегрессионные модели.

По результатам проведенного исследования можно будет увидеть, что эмпирически установленное влияние изменений монетарной политики на реальный сектор белорусской экономики схоже с оцененным в развитых странах, но не полностью аналогично. Прежде всего, это можно объяснить низкой степенью развития финансового рынка (Sims 1980). Следует также отметить, что монетарные власти не используют процентную ставку как основной инструмент для регулирования монетарной политики или стабилизации динамики обменного курса, в то время как интервенции широко применяются. Тем не менее, полученные результаты свидетельствуют о работоспособности трех рассматриваемых каналов. Наименьший лаг реакции (один квартал) целевых показателей (ВВП и инфляции) наблюдается на шок денежного предложения. Одной из особенностей оцененного передаточного механизма монетарной политики Республики Беларусь является отсутствие реакции экспорта на шок со стороны обменного курса белорусского рубля.

2 Теоретические аспекты реализации байесовских векторных авторегрессионных моделей

В основе байесовского подхода оценивания параметров эконометрических моделей лежит идея объединения экспертных предположений относительно априорного распределения статистических данных и непосредственный анализ самих эмпирических данных. В отличие от классических подходов статистического анализа, предполагающих построение оценки совокупности параметров модели на основе статистических данных, байесовский подход подразумевает использование предположений относительно априорного распределения вероятностей оцениваемых параметров. Например, предположим, что у нас есть обоснованное априорное предположение о том, что в авторегрессионной модели обменного курса коэффициент при

первой лаговой переменной равняется единице, в то время как оставшиеся коэффициенты при лаговых переменных равняются нулю. Такое априорное предположение соответствует допущению о том, что динамика обменного курса описывается процессом случайного блуждания, что означает, что изменения в динамике обменного курса полностью непредсказуемы. Байесовский подход к оцениванию параметров данной авторегрессионной модели позволит учесть первоначальное допущение относительно параметров модели и оценить их на основе имеющейся статистической информации по обменному курсу. Априорное предположение относительно определенного параметра модели может иметь эмпирическое либо теоретическое обоснование.

При реализации байесовского подхода априорные предположения относительно оцениваемых параметров модели $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\}$ могут быть определены в виде функции плотности априорного распределения вероятностей $p(\theta)$. Например, рассмотрим авторегрессионную модель обменного курса:

$$s_t = \theta_1 s_{t-1} + \theta_2 s_{t-2} + \dots + \theta_p s_{t-k} + \varepsilon_t,$$

где s_t — значения обменного курса в момент времени t , ε_t — ошибка модели, являющаяся «белым шумом».

Предположим, что параметры $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\}$ распределены независимо и имеют плотности распределения $p(\theta_1), p(\theta_2), \dots, p(\theta_k)$. Априорное предположение, заключающееся в формализации динамики обменного курса как процесса случайного блуждания, можно записать математически следующим образом:

$$\mathbb{E}[\theta_i] = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_i p(\theta_i) d\theta_i = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 0, & i \neq 1 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, k,$$

где $\mathbb{E}[\cdot]$ обозначает математическое ожидание.

Статистическое оценивание параметров модели в байесовском подходе производится на основе построения апостериорного распределения, учитывающего как априорные экспертные предположения, так и эмпирические данные. При этом априорное распределение параметров θ , описываемое безусловной функцией плотности распределения $p(\theta)$, может быть скорректировано с учетом информации, содержащейся в выборке данных и описываемой условной функцией плотности распределения $p(s_t|\theta)$.

Для вывода апостериорной функции плотности распределения $p(\theta|s_t)$ используется формула Байеса:

$$p(\theta|s_t) = \frac{p(s_t|\theta)p(\theta)}{p(s_t)}, \quad (1)$$

где $p(s_t)$ — безусловная функция плотности распределения обменного курса.

На основе полученного апостериорного распределения строятся точечные или интервальные оценки параметров θ . Как правило, в качестве точечной оценки параметра $\hat{\theta}$ выступает среднее значение апостериорного распределения (Doan, Litterman & Sims 1984, Айвазян 2008).

При прогнозировании временных рядов байесовский подход широко используется для оценивания векторных авторегрессионных моделей (*VAR*) (Doan, Litterman & Sims 1984, Karlsson 2012, Коор & Коробилис 2009, Litterman & Supel 1983). Рассматриваемые в упомянутых исследованиях n -мерные модели *VAR* для нестационарных временных рядов имеют вид:

$$y_t = B_1 y_{t-1} + \dots + B_k y_{t-k} + \mu + \varepsilon_t, \quad (2)$$

где y_t — вектор размерности $n \times 1$ нестационарных временных рядов, μ — вектор констант размерности $n \times 1$, ε_t — вектор ошибок размерности $n \times 1$, B_1, \dots, B_k — матрицы параметров модели размерности $n \times n$.

Векторная авторегрессионная модель может быть представлена как система уравнений, в которой каждая из переменных зависит от константы и переменных, участвующих в данной системе, взятых с лагом порядка от 1 до k . Все уравнения системы содержат одинаковое количество объясняющих переменных. Каждое уравнение можно оценить методом наименьших квадратов (МНК).

Однако приведенная модель (2) содержит $n + kn^2$ оцениваемых параметров. Таким образом, оценки параметров векторной авторегрессионной модели на основе эмпирических данных зачастую являются неточными и незначительно отличающимися от нуля. Проблема чрезмерной параметризации особенно характерна при малых объемах выборок. Во многих исследованиях показывается, что прогнозирование динамики макропеременных на основе векторных авторегрессионных моделей, оцененных МНК, не дает качественных результатов.

Таким образом, с целью разрешения проблемы чрезмерной параметризации в описываемой работе, аналогично исследованию Doan, Litterman & Sims (1984), предложен байесовский подход к оцениванию параметров модели (2), отражающей спецификацию трансмиссионного механизма денежно-кредитной политики в общем виде. Одним из основных вопросов при реализации данного подхода остается корректное задание предположения относительно априорного распределения параметров модели.

3 Проблема выбора априорных распределений параметров

Выбор априорного распределения, как правило, обосновывается предварительными имеющимися предположениями относительно исследуемого процесса. При этом среди множества возможных априорных распределений выбираются семейства, сопряженные по распределению с наблюдаемыми данными, то есть такие семейства априорных распределений, для которых полученное на основе формулы (1) апостериорное распределение будет принадлежать тому же семейству распределения вероятностей. Так, например, в случае предположения о нормальности распределения исследуемых данных, апостериорное распределение будет принадлежать нормальному семейству распределений, а выбор априорных распределений будет проведен среди распределений, сопряженных нормальному.

Предположение о нормальности распределения оцениваемых параметров является стандартным при построении моделей для анализа экономических взаимосвязей (Nicolo, Geadah & Rozhkov 2003, Peersman & Smets 2001, Айвазян 2008). Исходя из этого, в статье рассматриваются следующие предположения относительно априорного распределения параметров модели:

- предположение относительно независимого нормального распределения параметров модели (Litterman 1980),
- априорное распределение, отражающее скудность априорных знаний (САЗ-априорное распределение) (Jeffreys 1957, Айвазян 2008),
- предположение относительно совместного нормального распределения параметров модели (Kadiyala & Karlsson 1997, Koop & Korobilis 2009).

В общем случае каждое конкретное предположение относительно априорного распределения параметров модели характеризуется собственными параметрами, которые принято называть гиперпараметрами (Giannone, Lenza & Primiceri 2012). Для различных априорных

распределений наборы гиперпараметров различаются. Таким образом, задача выбора априорного распределения включает задачу выбора гиперпараметров априорного распределения.

Предположение относительно независимого нормального распределения параметров

В рамках данного предположения для каждого уравнения i модели плотность априорного распределения параметров может быть представлена следующим образом:

$$\beta_i \sim N(\tilde{\beta}_i, \tilde{\Omega}_i), \quad (3)$$

где $\tilde{\beta}_i, \tilde{\Omega}_i$ — соответственно математическое ожидание и ковариационная матрица априорного распределения для i -го уравнения.

Для определения априорного распределения параметров модели широко используется подход предложенный Litterman (1980). Данный подход исходит из предположения о том, что эндогенные переменные, включенные в модель VAR, являются авторегрессионными процессами первого порядка, либо процессами случайного блуждания. В этом случае математическое ожидание априорного распределения может быть представлено для каждого уравнения как $\tilde{\beta}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где компонент равный единице имеет индекс i , и обозначает коэффициент при первом лаге эндогенной переменной в уравнении i . Для определения элементов ковариационной матрицы $\tilde{\Omega}_i$ вводятся гиперпараметры, определяющие «узость» (Litterman 1980) отклонений компонент математического ожидания априорного распределения. Элементы ковариационной матрицы рассчитываются по формуле:

$$\tilde{\Omega}_{ij} = \begin{cases} \pi_1/k, & i = j \\ \frac{\pi_2 \sigma_i^2}{k \sigma_j^2}, & i \neq j \end{cases},$$

где k — порядок авторегрессии, σ_i^2, σ_j^2 — квадраты отклонений для переменных i, j .

Таким образом, после определения априорного распределения осуществляется переход от априорного распределения (3) к апостериорному распределению:

$$\beta_i | Y \sim N(\bar{\beta}_i, \bar{\Omega}_i),$$

где $\bar{\beta}_i = \bar{\Omega}_i(\tilde{\Omega}_i^{-1}\tilde{\beta}_i + \sigma_i^{-2}X'Y_i)$, $\bar{\Omega}_i = (\tilde{\Omega}_i^{-1} + \sigma_i^{-2}X'X)^{-1}$, Y_i — вектор эндогенных переменных уравнения i , X — матрица лагов эндогенных переменных.

Оптимальные значения гиперпараметров различны для каждой конкретной модели. Их выбор может осуществляться, например, на основе критерия, предложенного в работе Kadiyala & Karlsson (1997) и состоящего в выборе гиперпараметров, при которых у построенной модели наилучшие прогностические свойства.

Априорное распределение, отражающее скудность априорных знаний

Использование САЗ-априорных распределений целесообразно в случае, когда сделать какое-либо априорное предположение относительно значений оцениваемого параметра не представляется возможным. Для формализованного представления плотности априорного распределения оцениваемого параметра модели θ_i , который теоретически может принимать любые значения на бесконечном или конечном интервале, Jeffreys (1957) предложил считать плотность априорного распределения данного параметра постоянной.

В качестве плотности априорного распределения в работе Kadiyala & Karlsson (1997) предложено использовать:

$$p(\beta, \Sigma) \propto |\Sigma|^{-(n+2)/2},$$

где n — число переменных модели, Σ — ковариационная матрица остатков модели. В этом случае совместное апостериорное распределение оцениваемых параметров модели примет вид:

$$\beta|\Sigma, Y \sim N\left(\hat{\beta}, \Sigma \otimes (X'X)^{-1}\right), \quad \Sigma|Y \sim iW\left((Y - X\hat{B})'(Y - X\hat{B}), T - k\right),$$

где $\hat{\beta}$, \hat{B} — МНК-оценки параметров модели в векторной и матричной форме, \otimes — произведение Кронекера, $iW(\cdot, T - k)$ — обратное распределение Уишарта с $T - k$ степенями свободы.

Необходимо отметить, что в случае данного априорного предположения нет необходимости в выборе гиперпараметров.

Предположение относительно совместного нормального распределения оценок параметров модели

Представленные выше предположения относительно априорного распределения параметров имеют ряд ограничений и упрощений. В случаях, когда на основе априорных сведений можно сделать предположение о совместном нормальном распределении параметров модели, широко используется следующее предположение (Kadiyala & Karlsson 1997, Karlsson 2012, Koop & Korobilis 2009) об априорном распределении параметров модели:

$$\beta|\Sigma \sim N\left(\tilde{\beta}, \Sigma \otimes \tilde{\Omega}\right), \quad \Sigma \sim iW\left(\tilde{\Sigma}, \alpha\right), \quad (4)$$

где $\alpha > n + 1$ — гиперпараметр данного априорного предположения, характеризующий число степеней свободы обратного распределения Уишарта. Распределение (4) можно представить в форме безусловного распределения для β следующим образом:

$$\beta \sim N\left(\tilde{\beta}, (\alpha - n - 1)^{-1}\tilde{\Sigma} \otimes \tilde{\Omega}\right),$$

где гиперпараметры $\tilde{\beta}$, $\tilde{\Sigma}$ могут определяться на основе подходов, предложенных в Kadiyala & Karlsson (1997), Karlsson (2012), Koop & Korobilis (2009).

Апостериорное распределение будет иметь вид (Kadiyala & Karlsson 1997):

$$\beta|\Sigma, Y \sim N\left(\bar{\beta}, \Sigma \otimes \bar{\Omega}\right), \quad \Sigma|Y \sim iW\left(\bar{\Sigma}, T + \alpha\right),$$

где

$$\bar{\Omega} = (\tilde{\Omega}^{-1} + X'X)^{-1},$$

$$\bar{B} = \tilde{\Omega}(\tilde{\Omega}^{-1}\tilde{B} + X'X\hat{B}),$$

$$\bar{\Sigma} = \hat{B}'X'X\hat{B} + \tilde{B}\tilde{\Omega}^{-1}\tilde{B} + \tilde{\Sigma} + (Y - X\hat{B})' \cdot (Y - X\hat{B}) + \bar{B}'(\tilde{\Omega}^{-1} + X'X)\bar{B},$$

а \hat{B} — МНК-оценка вектора параметров.

4 Спецификация моделей трансмиссионного механизма

Теоретически монетарный трансмиссионный механизм определяется и формулируется достаточно строго, как последовательность макроэкономических переменных, через которые изменения монетарной политики оказывают влияние на реальные переменные, такие как занятость, выпуск. Традиционно выделяют следующие каналы трансмиссионного механизма денежно-кредитной политики: канал процентной ставки, канал валютного курса, широкий канал кредитования, узкий канал кредитования, канал благосостояния, канал ожиданий и

др. Точная оценка работы отдельных каналов монетарной трансмиссии крайне затруднительна для любой страны в силу существующего множества взаимовлияний экономических переменных друг на друга. Тем не менее, оценка совокупного эффекта изменения процентных ставок, обменного курса или кредита на выпуск и цены, включая силу влияния и период воздействия, — это стандартная практика при исследовании передаточного механизма денежно-кредитной политики. Таким образом, в целях проведения анализа трансмиссионного механизма Республики Беларусь были выделены три наиболее важных для страны канала: канал обменного курса, канал процентной ставки и узкий канал кредитования.

Концептуально система моделей для анализа каналов трансмиссионного механизма реализована на основе четырех векторных авторегрессионных моделей, посвященных трем основным каналам передаточного механизма: процентному каналу, каналу обменного курса и узкому каналу кредитования.

Первая из авторегрессионных моделей, включающая шесть уравнений, описывает функционирование кредитного канала ¹:

$$\begin{pmatrix} m3 \\ credit \\ r \\ inv \\ gdp \\ cpi \end{pmatrix}_t = A(L) \times \begin{pmatrix} m3 \\ credit \\ r \\ inv \\ gdp \\ cpi \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \varepsilon^{m3} \\ \varepsilon^{credit} \\ \varepsilon^r \\ \varepsilon^{inv} \\ \varepsilon^{gdp} \\ \varepsilon^{cpi} \end{pmatrix}_t, \quad (5)$$

где $A(L)$ — полиномиальный лаг, ε^i — ошибки i -го уравнения, являющиеся стационарным процессом.

Согласно экономической теории, проведение жесткой денежно-кредитной политики монетарными властями приводит к сокращению объемов предоставляемых кредитов, что обуславливает падение потребления и инвестиций, а в дальнейшем и совокупного выпуска (Bernanke & Blinder 1988):

$$m3 \downarrow \Rightarrow credit \downarrow \Rightarrow r \uparrow \Rightarrow inv \downarrow \Rightarrow gdp \downarrow \Rightarrow cpi \downarrow .$$

Вторая и третья авторегрессионные модели посвящены анализу канала обменного курса:

$$\begin{pmatrix} exch \\ ex \\ gdp \\ cpi \end{pmatrix}_t = B(L) \times \begin{pmatrix} exch \\ ex \\ gdp \\ cpi \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \varepsilon^{exch} \\ \varepsilon^{ex} \\ \varepsilon^{gdp} \\ \varepsilon^{cpi} \end{pmatrix}_t, \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} exch \\ cons \\ gdp \\ cpi \end{pmatrix}_t = C(L) \times \begin{pmatrix} exch \\ cons \\ gdp \\ cpi \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \varepsilon^{exch} \\ \varepsilon^{cons} \\ \varepsilon^{gdp} \\ \varepsilon^{cpi} \end{pmatrix}_t, \quad (7)$$

где $B(L)$, $C(L)$ — полиномиальные лаги, ε^i — ошибки i -го уравнения, являющиеся стационарным процессом.

При режиме плавающего обменного курса монетарной политики описываемый канал может быть представлен следующим образом: снижение процентной ставки приводит к обесцениванию обменного курса, что увеличивает экспорт и обуславливает рост совокупного выпуска и инфляции.

¹ Экономический смысл переменных системы описан в таблице 1.

Если в экономике наблюдается режим фиксированного обменного курса, монетарные власти могут достичь схожего эффекта путем девальвирования национальной валюты:

$$exch \downarrow \Rightarrow ex \uparrow \Rightarrow gdp \uparrow \Rightarrow cpi \uparrow .$$

Теории паритета процентных ставок и Маршалла–Лернера предоставляют ряд объяснений процесса функционирования канала обменного курса. В данной области было разработано значительное количество моделей, таких как модель Манделла–Флеминга, модель Дорнбуша и Новая макроэкономическая модель открытой экономики.

Следует также отметить, что обесценивание национальной валюты приводит к ухудшению финансового состояния экономических агентов, что сказывается на их платежеспособности по кредитным займам. Последнее приводит к сокращению потребления и соответствующему снижению совокупного выпуска и замедлению роста экономики:

$$exch \downarrow \Rightarrow cons \downarrow \Rightarrow gdp \downarrow .$$

Последний блок системы оценивает параметры функционирования процентного канала:

$$\begin{pmatrix} r \\ cons \\ gdp \\ cpi \end{pmatrix}_t = D(L) \times \begin{pmatrix} r \\ cons \\ gdp \\ cpi \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \varepsilon^r \\ \varepsilon^{cons} \\ \varepsilon^{gdp} \\ \varepsilon^{cpi} \end{pmatrix}_t, \quad (8)$$

где $D(L)$ — полиномиальный лаг, ε^i — ошибки i -го уравнения, являющиеся стационарным процессом.

Классическая модель функционирования процентного канала монетарного трансмиссионного механизма была разработана Кейнсом:

$$r \uparrow \Rightarrow cons \downarrow \Rightarrow gdp \downarrow \Rightarrow cpi \downarrow .$$

Жесткая монетарная политика, выражающаяся в достаточно высоких реальных процентных ставках, обуславливает рост стоимости денег, что приводит к сокращению как инвестиций, так и потребления. Падение объемов потребления и инвестиций негативно сказывается на совокупном выпуске, а также снижает уровень инфляции. В данной модели взаимосвязей макроэкономических переменных рассматривается именно реальная процентная ставка как индикатор, воздействующий на решение экономических агентов (Mishkin 2001).

Для построения описываемой системы авторегрессионных моделей использовались квартальные данные с I квартала 2003 г. по II квартал 2014 г. Факторы рассматривались в различных формах показателей. При построении моделей с учетом статистической и экономической адекватности наилучшие результаты были получены для форм показателей, приведенных в таблице 1.

Все переменные модели, за исключением показателей, отражающих процентные ставки, представлены в логарифмической форме. Данная операция линеаризует временные ряды, что упрощает работу с ними. Также временные ряды, в динамике которых наблюдается сезонность, очищены от нее.

Следует отметить, что одной из основных задач при применении байесовского подхода к оцениванию параметров векторных авторегрессионных моделей является определение оптимальных гиперпараметров используемых априорных распределений параметров модели.

Таблица 1: Обозначения переменных системы уравнений спроса на деньги

Обозначения	Показатели и единицы измерения
$credit_t$	Задолженность секторов экономики по кредитам, выданным банками РБ, в среднегодовых ценах 2005 г., млрд. руб.
$m3_t$	Денежный агрегат М3, в среднегодовых ценах 2005 г., млрд. руб.
$const_t$	Потребление домашних хозяйств РБ, в среднегодовых ценах 2005 г., млрд. руб.
inv_t	Валовое накопление, в среднегодовых ценах 2005 г., млрд. руб.
gdp_t	Валовой внутренний продукт, в среднегодовых ценах 2005 г., млрд. руб.
spi_t	Индекс потребительских цен, I кв. 2005 г. = 1
$exch_t$	Средневзвешенный курс валютного рынка, прямая котировка: количество белорусских рублей за доллар США ²
ex_t	Экспорт неэнергетических товаров и услуг в среднегодовых ценах 2005 г., млрд. руб.
r_t	Реальная процентная ставка по срочным депозитам в национальной валюте, в %

5 Определение гиперпараметров априорного распределения и оценивание параметров модели

Построение векторных авторегрессионных моделей осуществляется при предположении, что все рассматриваемые переменные являются эндогенными. При оценивании моделей каналов трансмиссионного механизма денежно-кредитной политики Республики Беларусь на основе байесовского подхода было применено каждое из описанных выше предположений об априорном распределении параметров модели. При построении оценок параметров моделей требовалось выбрать гиперпараметры их априорных распределений.

Для определения гиперпараметров рассматриваемых априорных распределений параметров моделей, применялся широко используемый в исследованиях Giannone, Lenza & Primiceri (2012), Kadiyala & Karlsson (1997), Mourinho-Felix & Catela-Nunes (2003) подход, состоящий в калибровке гиперпараметров на основе прогнозной точности оцененной модели. В рамках данного подхода исходная выборка, включающая квартальные данные с I квартала 2003 г. по II квартал 2014 г., разбивалась на подвыборки: с I квартала 2003 г. по I квартал 2013 г. и со II квартала 2013 г. по II квартал 2014 г. Первая подвыборка использовалась для оценивания моделей, а вторая — для оценивания их прогнозной точности.

В качестве критерия прогнозной точности моделей выступал показатель средней квадратической ошибки прогноза ($RMSE$), который рассчитывался следующим образом:

$$RMSE = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n\sigma_i} \left[\sum_{h=1}^4 \frac{1}{4} (\hat{Y}_{i,t+h} - Y_{i,t+h})^2 \right]^{1/2},$$

²Выбор данного экономического показателя для оценки обменного курса национальной валюты обусловлен тем фактом, что средневзвешенный курс валютного рынка формируется, исходя из котировок коммерческих банков, и в большей степени отражает рыночную динамику белорусского рубля в сравнении с курсом, установленным официально.

где $\hat{Y}_{i,t+h}$ — ретроспективный прогноз значения переменной i на h периодов вперед от момента времени t , n — число переменных модели, σ_i — стандартное отклонение переменной i .

В рамках предположения о независимом нормальном априорном распределении параметров модели (П-1) задаются гиперпараметры π_1, π_2 , используемые для определения ковариационной матрицы априорного распределения. Как правило, данные гиперпараметры принимают положительные значения меньше единицы Giannone, Lenza & Primiceri (2012), Kadiyala & Karlsson (1997), Mourinho-Felix & Catela-Nunes (2003). Рис. 1 иллюстрирует на примере модели кредитного канала (5) выбор гиперпараметров для предположения (П-1), осуществляемого на основе описанного подхода, заключающегося в выборе гиперпараметров с наименьшим значением $RMSE$ для построенной модели. Выбранные значения гиперпараметров и соответствующие значения $RMSE$ приведены в таблице 2.

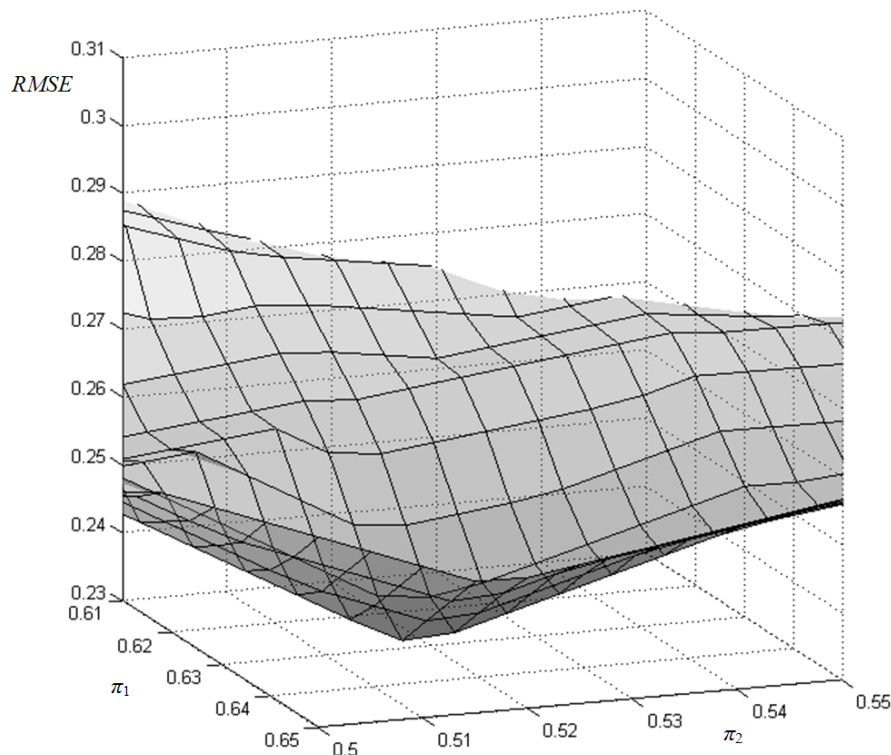


Рис. 1: Зависимость между $RMSE$ модели и гиперпараметрами при П-1

Предположение о САЗ-априорных распределениях (П-2) не требует определения гиперпараметров. Приведенные в таблице 2 значения $RMSE$ характеризуют прогнозную точность моделей (5), (6), (7), (8), построенных на основе (П-2).

В случае предположения о совместном нормальном априорном распределении параметров модели (П-3) в качестве гиперпараметра выступает параметр α , принимающий согласно исследованиям Giannone, Lenza & Primiceri (2012), Kadiyala & Karlsson (1997), значения от $n + 2$ до T , T — количество наблюдений в выборке.

В ходе выбора гиперпараметров рассматриваемых предположений для каждой из моделей канала трансмиссионного механизма строится априорное распределение и происходит переход к апостериорному распределению. На основе апостериорного распределения производится оценивание параметров моделей и соответствующих значений $RMSE$, которые позволяют не только выбрать конкретные значения гиперпараметров, но и определить лучшее априорное распределение для каждой из моделей. Следует отметить, что $RMSE$ учитывает как положительные, так и отрицательные отклонения спрогнозированных значений анализируемого показателя от его фактической динамики. При построении прогноза экономического

Таблица 2: Выбор гиперпараметров априорных распределений на основе прогнозной точности моделей

Канал трансмиссионного механизма	Переменные	Априорное предположение	Значения гиперпараметров	<i>RMSE</i>
Кредитный канал	$m3_t, credit_t, r_t,$ inv_t, gdp_t, cpi_t	П-1	$\pi_1 = 0,633; \pi_2 = 0,517$	0,242
		П-2	–	0,418
		П-3	$\alpha = 40$	0,069
Канал обменного курса	$exch_t, ex_t,$ gdp_t, cpi_t	П-1	$\pi_1 = 0,005; \pi_2 = 0,595$	0,278
		П-2	–	0,748
		П-3	$\alpha = 23$	0,142
	$m3_t, exch_t, const_t$ gdp_t, cpi_t	П-1	$\pi_1 = 0,128; \pi_2 = 0,089$	0,235
		П-2	–	1,178
		П-3	$\alpha = 40$	0,213
Процентный канал	$r_t, const_t, gdp_t,$ cpi_t	П-1	$\pi_1 = 0,945; \pi_2 = 0,693$	0,237
		П-2	–	0,555
		П-3	$\alpha = 17$	0,187

показателя отсутствует какой-либо четкий интервал или строго определенное оптимальное значение *RMSE*. Следовательно, расчетные значения средней квадратической ошибки прогноза имеет смысл использовать только при сопоставлении прогнозов одного и того же показателя, полученных на основе различных методик с целью выбора оптимальной (таблица 2).

Таким образом, на основе полученных расчетных результатов (таблица 2) можно сделать вывод, что наилучшим предположением об априорном распределении параметров векторных авторегрессионных моделей каналов монетарного трансмиссионного механизма, оцененных на основе байесовского подхода, является предположение о многомерном нормальном распределении.

Тот факт, что одним из основных критериев качества векторных авторегрессионных моделей, оцененных на основе байесовского подхода, является их прогнозная точность, может поставить под сомнение преимущество данного подхода. Однако на основе байесовских векторных авторегрессий возможно получить качественный прогноз большой группы переменных, не накладывая ряд ограничений, при этом полученные результаты являются более информативными в сравнении с иными, рассчитанными при использовании других подходов. Результаты проведенных расчетов, реализованных через рассматриваемый подход, позволяют ответить на более широкий спектр вопросов относительно развития динамики основных макроэкономических показателей в будущем. Примером таких вопросов могут быть следующие: каким образом повлияет неожиданное изменение денежного предложения на динамику совокупного выпуска? А также: какова вероятность развития рецессии в следующем году? Корректность ответа на любой из данных вопросов достаточно тяжело оценить. Но ответы, основанные на байесовских векторных авторегрессиях, являются наиболее точными в сравнении с выводами, подкрепленными иными количественными расчетами (Litterman & Supel 1983).

6 Функции импульсных откликов каналов трансмиссионного механизма

На основе применения байесовского подхода к анализу каналов монетарного трансмиссионного механизма с использованием предположения о многомерном нормальном априорном распределении вектора параметров модели были получены апостериорные распределения параметров модели. При анализе полученных результатов были определены средние значения параметров модели, а также их стандартные отклонения, что позволило получить функции импульсных откликов, характеризующие работу передаточного механизма монетарной политики Республики Беларусь, и количественно оценить реакции ряда макропеременных на шоки со стороны денежно-кредитной политики.

Математически функцию импульсных откликов можно представить следующим образом:

$$IRF(t, h, d_i) = \mathbb{E} \left[y_{t+h} \mid u_{t+j} = \begin{cases} d_i, & j = 0 \\ 0, & j \in (1, h) \end{cases}; \Pi_t \right] - \mathbb{E} [y_{t+h} \mid u_{t+j} = 0 \forall j \in (0, h); \Pi_t], \quad (9)$$

где функция импульсного отклика оценивает реакцию переменных системы на временном периоде $t + h$, $h = 0, \dots, H$ на шоки вектора d_i , Π_t — информация, доступная в каждый период времени t , соответствующий лагу зависимой переменной до порядка k .

При оценивании импульсных откликов векторных авторегрессионных моделей

$$y_t = C(L)y_{t-1} + u_t, \quad (10)$$

где y_t — вектор эндогенных переменных в период времени t , $C(L)$ — полиномиальный лаг, u_t — вектор остатков модели, используется свойство обратимости, позволяющее представить векторную авторегрессионную модель (10) в виде векторной модели скользящего среднего

$$y_t = \bar{y} + M(L)u_t. \quad (11)$$

Выражение (11) можно записать в виде разложения на шокковые компоненты, соответствующие периодам, предшествующим и последующим текущему моменту времени t , а также моменту времени t :

$$y_{t+h} = \bar{y} + \sum_{s=h+1}^{\infty} M_s L^s u_{t+h-s} + M_h u_t + \sum_{s=0}^{h-1} M_s L^s u_{t+h-s}. \quad (12)$$

Используя выражение (12), а также определение функции импульсного отклика (9) и вектор шоков d_i , получаем:

$$IRF(t, h, d_i) = \mathbb{E} \left[\bar{y} + \sum_{s=h+1}^{\infty} M_s L^s u_{t+h-s} + M_h d_i \right] - \mathbb{E} \left[\bar{y} + \sum_{s=h+1}^{\infty} M_s L^s u_{t+h-s} \right], \quad (13)$$

$$IRF(t, h, d_i) = M_h d_i,$$

где выражение (13) представляет собой вектор откликов системы переменных в период времени $t + h$ на шок i , наблюдаемый в момент времени t .

По результатам анализа функций импульсных откликов кредитного канала трансмиссионного механизма монетарной политики Республики Беларусь видно, что резкое возрастание широкой денежной массы (рост денежного агрегата МЗ на 5% (Рис. 2) приводит, прежде всего, к увеличению кредитных средств (на 0,8%) (Рис. 3) с лагом в два-три квартала.

Также положительный шок со стороны широкой денежной массы (Рис. 2), как и шок со стороны кредита (на 4%) (Рис. 4), обуславливает падение реальной процентной ставки: в

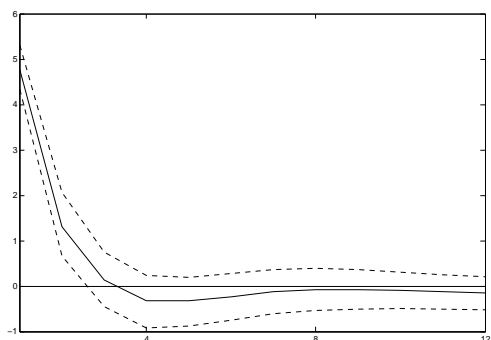


Рис. 2: Шок предложения денег, в %

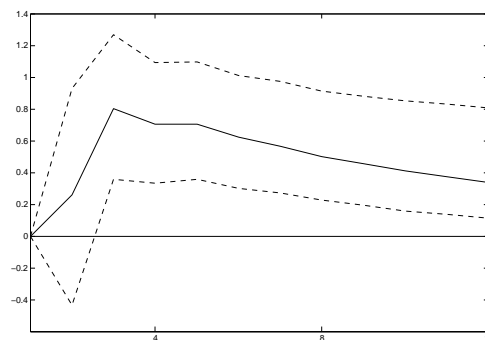


Рис. 3: Отклик кредита на шок предложения денег, в %

первом случае на 1,5 п.п. с лагом в два-три квартала (Рис. 5), во втором — на 1 п.п. с лагом в пять кварталов (Рис. 6). Последний факт объясняется тесной связью кредитного канала передаточного механизма с процентным таким образом, что ставка в данном случае усиливает наблюдаемое влияние на реальный сектор экономики.

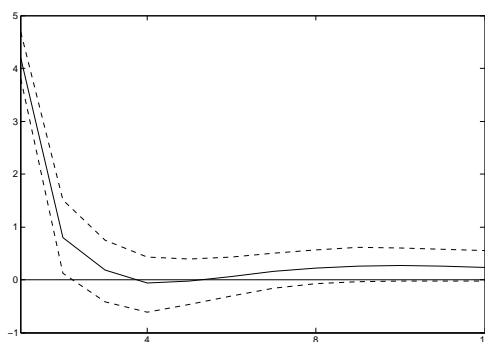


Рис. 4: Шок кредита, в %

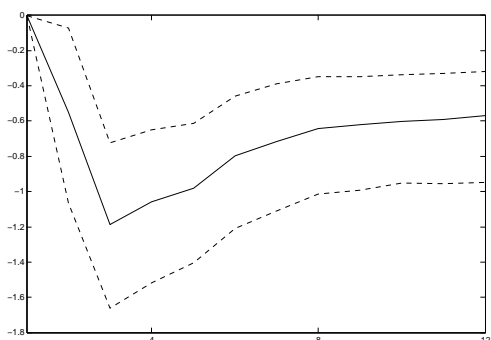


Рис. 5: Отклик реальной процентной ставки на шок предложения денег, в %

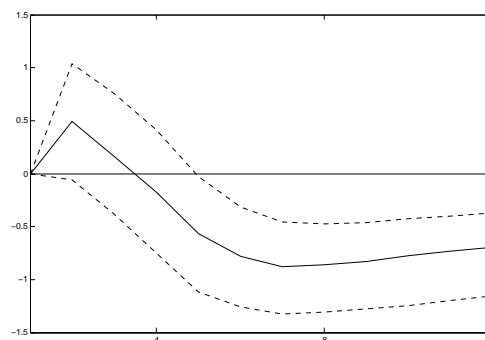


Рис. 6: Отклик реальной процентной ставки на шок кредитов, в %

Следует отметить, что прирост денежного агрегата М3 также напрямую обуславливает возрастание ВВП на 1% (Рис. 7) и индекса потребительских цен на 0,5% (Рис. 8) с лагом в два квартала.

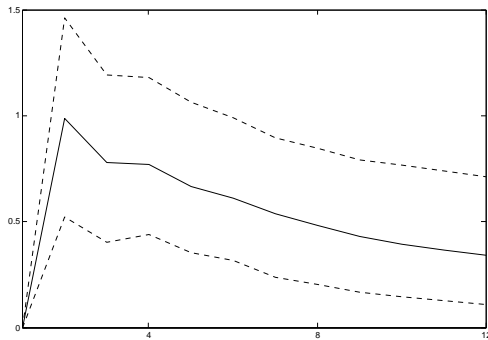


Рис. 7: Отклик ВВП на шок предложения денег, в %

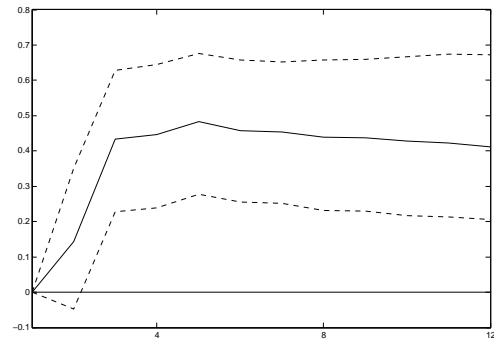


Рис. 8: Отклик индекса потребительских цен на шок предложения денег, в %

В свою очередь, положительный шок со стороны кредита также приводит к росту ВВП на 1% (Рис. 9) с лагом в один период и инфляции на 0,5% (Рис. 10) через три квартала.

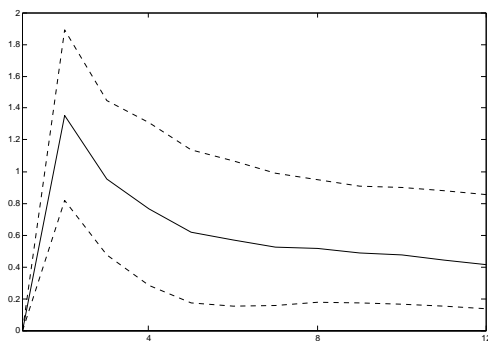


Рис. 9: Отклик ВВП на шок предложения кредитов, в %

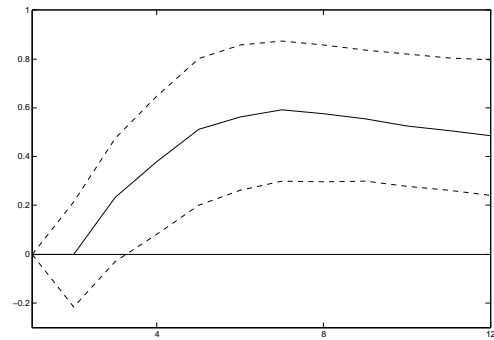


Рис. 10: Отклик индекса потребительских цен на шок предложения кредитов, в %

Изменение в динамике ВВП, оцененное на уровне 1%, приводит к возрастанию инфляции на 0,1%, наблюдаемому с лагом в четыре периода (Рис. 11).

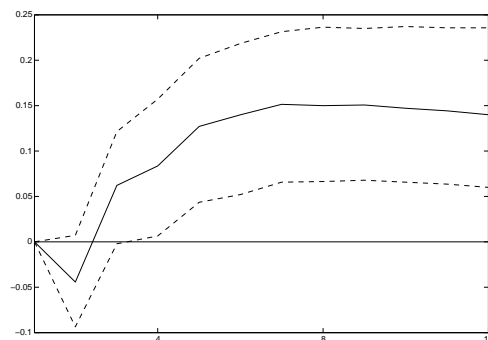


Рис. 11: Отклик индекса потребительских цен на изменения в динамике ВВП, в %

Согласно анализу канала обменного курса национальной валюты, можно сделать вывод, что единовременная девальвация белорусского рубля по отношению к доллару США (на 8%) (Рис. 12) не вызывает значительного изменения в динамике экспорта (Рис. 13), однако

обуславливает резкое падение динамики потребления (на 1,7%) (Рис. 14), наблюдаемое с лагом один-два квартала, которое, в свою очередь, приводит к сокращению объемов ВВП и уменьшению уровня инфляции (Рис. 15, Рис. 16).

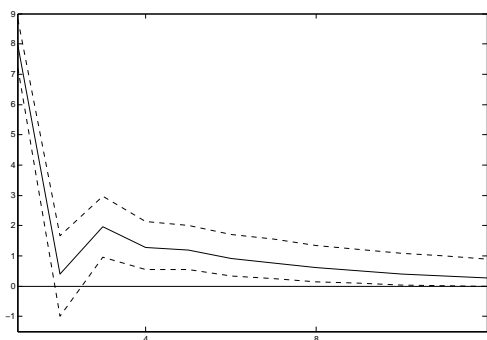


Рис. 12: Шок обменного курса национальной валюты, в %

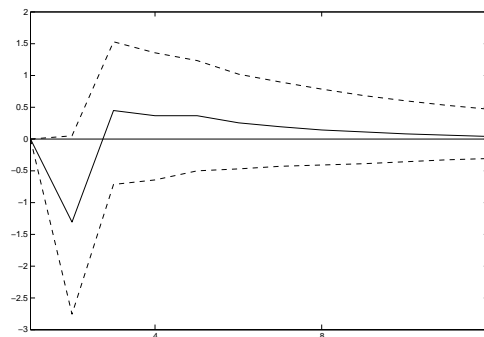


Рис. 13: Отклик экспорта на шок обменного курса национальной валюты, в %

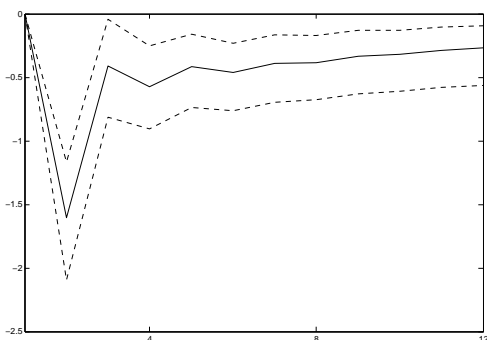


Рис. 14: Отклик потребления на шок обменного курса национальной валюты, в %

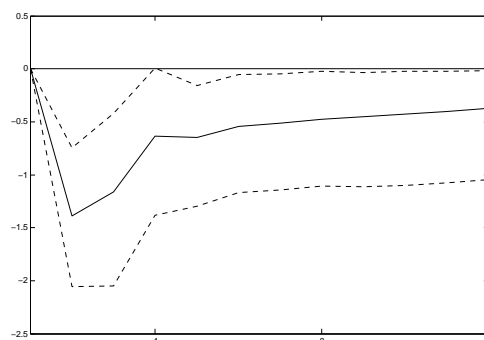


Рис. 15: Отклик ВВП на снижение потребления, в %

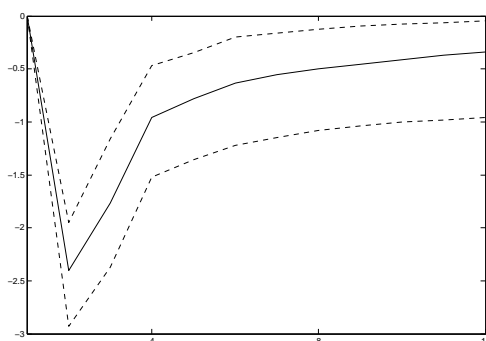


Рис. 16: Отклик индекса потребительских цен на снижение потребления, в %

При этом, следует отметить, что шок в динамике обменного курса национальной валюты напрямую вызывает резкое возрастание инфляции (падение стоимости белорусского рубля по отношению к доллару США на 8% приводит к увеличению инфляции на 3%) через два квартала (Рис. 17).

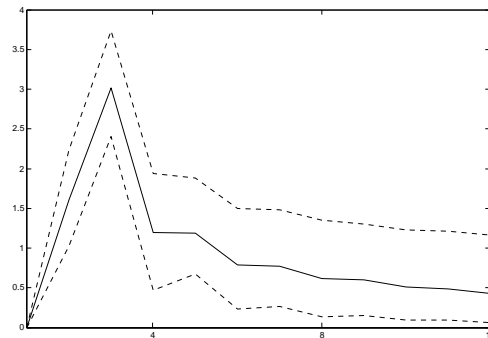


Рис. 17: Отклик индекса потребительских цен на шок обменного курса национальной валюты, в %

Шок со стороны реальной процентной ставки по депозитам, выраженным в национальной валюте (10 п.п.) (Рис. 18), обуславливает падение потребления на 4% (Рис. 19) и сокращение инфляции на 1,5% (Рис. 20), однако практически не влияет на динамику ВВП в краткосрочном периоде (Рис. 21).

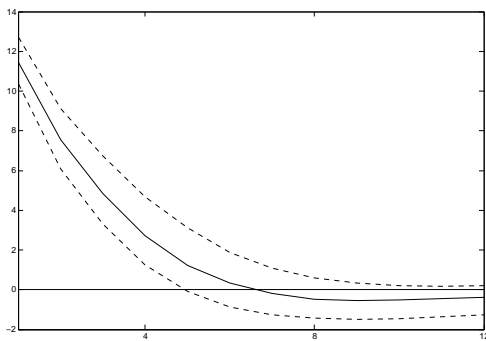


Рис. 18: Шок реальной процентной ставки, в %

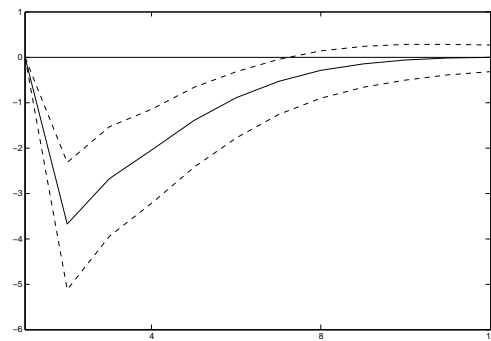


Рис. 19: Отклик потребления на шок реальной процентной ставки, в %

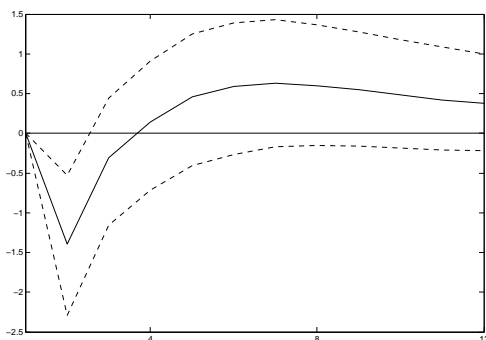


Рис. 20: Отклик индекса потребительских цен на шок реальной процентной ставки, в %

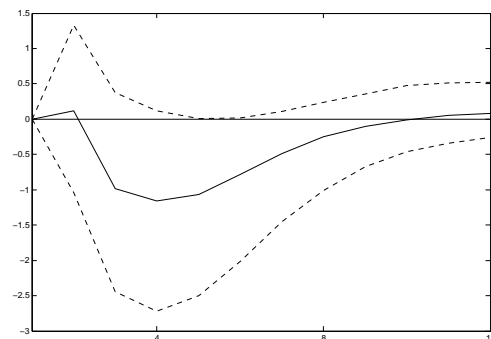


Рис. 21: Отклик ВВП на шок реальной процентной ставки, в %

При этом снижение уровня потребления приводит к уменьшению уровня инфляции на 2% (Рис. 22).

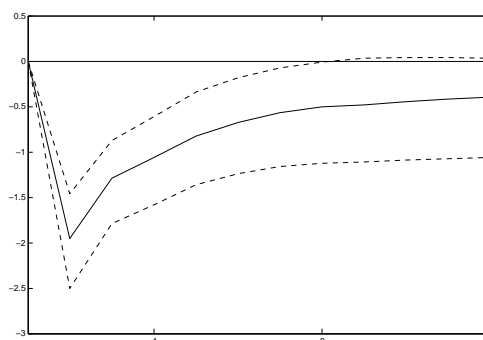


Рис. 22: Отклик индекса потребительских цен на изменения в динамике потребления, в %

Таким образом, схематично работу трех описываемых каналов трансмиссионного механизма можно представить как на Рис. 23. При этом количественные оценки силы откликов и лагов реакции макропеременных на шоки монетарных показателей систематизированы в таблице 3.

Таблица 3: Результаты откликов основных макроэкономических переменных на шоки монетарных показателей

Шоковая переменная		$credit_t$	$m3_t$	$exch_t$	r_t	
Оценка шока		4%	5%	8%	10 п.п.	
Прямой отклик	Отклик ВВП	направление	+	+	-	-
		оценка	1%	1%	-	-
		значимость	да	да	нет	нет
		лаг (кв.)	1	1	-	-
	Отклик инфляции	направление	+	+	+	-
		оценка	0,5%	0,5%	3%	1,5%
		значимость	да	да	да	да
		лаг (кв.)	3	2	2	2
Отклик через передаточную переменную	Отклик ВВП	направление	-	-	-	-
		оценка	-	-	1%	-
		значимость	нет	нет	да	нет
		лаг (кв.)	-	-	2	-
	Отклик инфляции	направление	+	+	-	-
		оценка	0,1%	3%	2%	-
		значимость	да	да	да	да
		лаг (кв.)	4	2	2	-

Результаты исследования не противоречат полученным на основе проведенных работ, посвященных эмпирическому анализу трансмиссионного механизма других стран с переходной экономикой (Samkharadze 2008, Mishra & Montiel 2012). На основе представленной схемы и таблицы можно сделать вывод, что каждый из рассматриваемых каналов денежно-

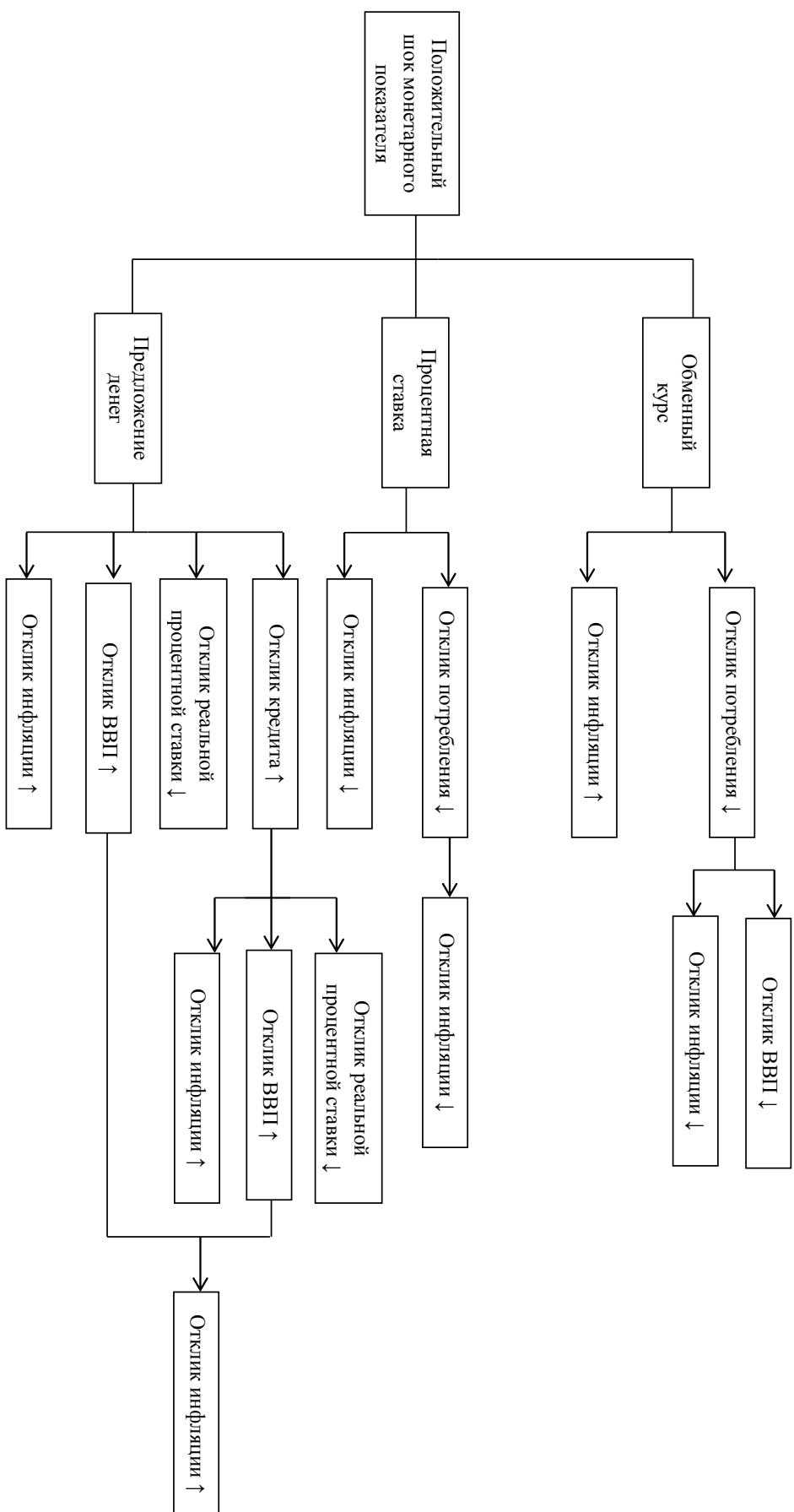


Рис. 23: Схема работы трех основных каналов (канала обменного курса, узкого кредитного канала и процентного канала) трансмиссионного механизма монетарной политики Республики Беларусь

кредитной политики Республики Беларусь является работоспособным. Значимый и значительный передаточный эффект девальвации национальной валюты на инфляцию, который, как правило, наблюдается в большинстве стран с переходной экономикой, является характерным и для РБ. Также одной из черт функционирования трансмиссионного механизма денежно-кредитной политики РБ, как страны с переходной экономикой, является работоспособность его процентного канала, характерная в большей степени для стран с развитой экономикой. Анализ функций импульсных откликов данного канала доказывает способность корректировки уровня инфляции в стране с помощью процентной ставки. Следует заметить, что в настоящее время процентная политика во многих странах является одним из эффективных инструментов влияния на реальный сектор экономики, а процентный канал часто играет роль центрального звена трансмиссионного механизма денежно-кредитной политики.

Одной из особенностей оцененного передаточного механизма монетарной политики Республики Беларусь является отсутствие реакции экспорта на шок со стороны обменного курса белорусского рубля. Данный эмпирический результат можно объяснить фактом, что длительное время девальвация национальной валюты сопровождалась мягкой экономической, монетарной и бюджетной политикой, выражающейся, прежде всего, в интенсивном кредитовании экономики, в том числе на льготных условиях, и увеличении заработной платы, что отразилось на быстром росте инфляции, которая, в свою очередь, компенсировала эффект влияния курса белорусского рубля. При этом на текущий момент именно шок со стороны обменного курса национальной валюты обуславливает более глубокие изменения целевых показателей (ВВП, инфляции), чем наблюдаемые при регулировании иных монетарных переменных. Так, единовременная девальвация белорусского рубля ведет к значительному ухудшению макроэкономической стабильности: обесценивание национальной валюты, не вызывая возрастание экспорта, является причиной значительного падения потребления, которое приводит к сокращению ВВП. Однако наблюдаемое в данном случае падение потребления обуславливает снижение уровня инфляции, что смягчит первоначальный положительный отклик данного показателя на обесценивание национальной валюты. Наименьший лаг реакции (один квартал) целевых показателей (ВВП и инфляции) наблюдается на шок денежного предложения.

7 Заключение

В представленном исследовании проведен эконометрический анализ трех основных для стран с переходной экономикой каналов (канала обменного курса, узкого кредитного канала и процентного канала) монетарного трансмиссионного механизма на основе эмпирических данных Республики Беларусь за период с 2003 г. по 2014 г. (II кв.). Были построены векторные авторегрессионные модели для каждого из перечисленных каналов передаточного механизма денежно-кредитной политики, оценивание которых осуществлялось при использовании байесовского подхода. Данный подход оценивания параметров модели в значительной степени отличается от классического возможностью одновременного учета в оцениваемых параметрах как имеющихся эмпирических данных, так и экспертных предположений. На основе байесовских векторных авторегрессий возможно получить качественный прогноз большой группы переменных, не накладывая ряд ограничений, при этом полученные результаты являются более информативными в сравнении с иными, рассчитанными при использовании других подходов.

На основе построенных векторных авторегрессий были получены функции импульсных откликов, которые применяются для анализа и характеристики реакции системы макропеременных на шоки рассматриваемой системы монетарных показателей. Результаты исследования не противоречат полученным на основе эмпирических данных других стран с переходной экономикой и свидетельствуют о работоспособности рассматриваемых каналов

денежно-кредитной политики Республики Беларусь. Наименьший лаг реакции (один квартал) целевых показателей (ВВП и инфляции) наблюдается на шок денежного предложения. Однако шок со стороны обменного курса национальной валюты обуславливает более глубокие изменения целевых показателей, чем наблюдаемые при регулировании иных монетарных переменных. Так, единовременная девальвация белорусского рубля (8%), не вызывая возрастание экспорта, является причиной падения потребления (на 1,7%), наблюдаемого с лагом один-два квартала, что, в свою очередь, приводит к сокращению ВВП. Шок со стороны реальной процентной ставки по депозитам, выраженным в национальной валюте (10 п.п.), вызывает падение потребления на 4% и сокращение инфляции более чем на 2%. Отмеченные факты доказывают способность корректировки уровня инфляции в стране с помощью процентной ставки и подчеркивают необходимость повышения значимости процентной ставки по срочным рублевым депозитам как инструмента денежно-кредитного регулирования и ослабления роли обменного курса национальной валюты к доллару США в формировании структуры финансовых активов населения.

Одна из основных негативных особенностей функционирования монетарного трансмиссионного механизма Республики Беларусь — отсутствие канала цен на активы в виду низкой степени развития финансового рынка. Решением данной проблемы может стать проработка Национальным банком РБ ряда вопросов, среди которых: совершенствование финансовых рынков, институтов и инструментов не только с точки зрения выполнения ими роли посредника при трансформации сбережений в инвестиции и перераспределения капитала в экономике, но и с позиций достижения стабильности всей финансовой системы. В среднесрочной перспективе, данные меры будут иметь решающее значение не только для повышения работоспособности канала цен на активы, но и для процентного и кредитного каналов трансмиссионного механизма.

Список литературы

- Айвазян С. (2008). Байесовский подход в эконометрическом анализе. *Прикладная эконометрика* 1, 93–130.
- Bernanke, B. & A. Blinder (1988). Credit, money, and aggregate demand. *American Economic Review* 78, 435–439.
- Christiano, L., Eichenbaum, M. & C. Evans (1988). Monetary policy shocks: What have we learned and to what end? *Handbook of Macroeconomics* 65–148.
- Doan, T., Litterman, R. & C. Sims (1984). Forecasting and conditional projection using realistic prior distributions. *Econometric Reviews* 3, 1–100.
- Ganev, G., Molnar, K., Rybinski, K. & P. Wozniak (2002). Transmission mechanism of monetary policy in Central and Eastern Europe. *Social and Economic Research* 52, 1–40.
- Giannone, D., Lenza, M. & G. Primiceri (2012). Prior selection for vector autoregressions. *NBER Working Papers* 18467, 1–39.
- Jeffreys, H. (1957). *Scientific Inference*. Cambridge University Press.
- Kadiyala, K. & S. Karlsson (1997). Numerical methods for estimation and inference in Bayesian VAR models. *Journal of Applied Econometrics* 12, 99–132.
- Karlsson, S. (2012). Forecasting with Bayesian vector autoregressions. Working Paper, Örebro University School of Business.
- Koop, G. & D. Korobilis (2009). Bayesian multivariate time series methods for empirical macroeconomics. *Foundations and Trends in Econometrics* 3, 267–358.
- Litterman, R. (1980). A Bayesian procedure for forecasting with vector autoregressions. Working Paper, Massachusetts Institute of Technology.
- Litterman, R. & T. Supel (1983). Using vector autoregressions to measure the uncertainty in Minnesota's revenue forecasts. *Quarterly Review, Federal Reserve Bank of Minneapolis* 1–15.

- Mishkin, F. (2001). The transmission mechanism and the role of asset prices in monetary policy. *NBER Working Papers* 8617, 1–55.
- Mishra, P. & P. Montiel (2012). How effective is monetary transmission in low-income countries? A survey of the empirical evidence. *IMF Working Papers* WP/12/143, 1–48.
- Mourinho-Felix, R. & L. Catela-Nunes (2003). Forecasting Euro area aggregates with Bayesian VAR and VECM models. *Banco de Portugal Working Papers* 4, 1–37.
- Nicolo, G., Geadah, S. & D. Rozhkov (2003). Financial development in the CIS-7 countries. *IMF Working Papers* 3, 1–20.
- Peersman, G. & F. Smets (2001). The monetary transmission mechanism in the Euro area: More evidence from VAR analysis. *European Central Bank Working Papers* 91, 1–36.
- Samkharadze, B. (2008). Monetary transmission mechanism in Georgia: Analyzing pass-through of different channels. Working Paper, Center for Operations Research and Econometrics.
- Sims, C. (1980). Macroeconomics and reality. *Econometrica* 48, 1–48.

Analysis of the monetary policy transmission mechanism in the Republic of Belarus: Bayesian approach

Aleksandra Bezborodova

National Bank of the Republic of Belarus, Minsk, Belarus

Yuri Mihalенок

National Bank of the Republic of Belarus, Minsk, Belarus

We present an econometric analysis of three main channels (exchange rate channel, interest rate channel and credit channel) of the transmission mechanism of the monetary policy in Belarus. The analysis uses vector autoregressive models built on data from 2003 to 2014 and implemented via the Bayesian approach. The results show that all the three channels are functional. The shortest lag reaction (one quarter) of the target indicators (GDP and inflation) is caused by the money supply shock. One of the features of the estimated transmission mechanism is lack of reaction of exports to an exchange rate shock of the Belarusian ruble.

Keywords: Republic of Belarus, transmission mechanism of the monetary policy, vector autoregressive model, Bayesian approach

JEL Classification: C11, E47, E52, E58

Отчёт о конференции

Международная конференция «Современный эконометрический инструментарий и приложения»

Международная эконометрическая конференция состоялась 18–20 сентября 2014 года в Нижнем Новгороде. Конференция была организована и профинансирована Высшей школой экономики и Российской экономической школой на базе нижегородского филиала ВШЭ. Это была первая в России конференция, проведённая на высоком международном уровне, которая бы специализировалась сугубо на эконометрике.

Ввиду практически полного отсутствия эконометрической традиции в России конференция должна была охватить все разделы эконометрики, как теоретической, так и прикладной. В процессе подготовки конференции были разосланы приглашения провести обзорные лекции («мастер-классы») эконометристам с мировым именем, семеро из которых согласились приехать. Однако, в результате «усушки и утряски» из-за неблагоприятных геополитических факторов в программе оказалось лишь четыре лекции (см. буклет).

На сайте ВШЭ была создана страничка конференции на английском языке. Сообщения о конференции были опубликованы на онлайн-платформе INOMICS, в твиттере Econometric Links, на веб-страницах конференций портала Economics Job Market Rumors, на сайте ConferUp, в журнале *Квантиль* и в его ЖЖ-сообществе. Были произведены рассылки о конференции по экономическим факультетам российских университетов, а также внутри ВШЭ (включая филиалы) и РЭШ. На конференцию было подано 60 статей из университетов разных стран, включая, помимо России, Украину, Великобританию, Францию, США, Швецию, Германию, Нидерланды, Испанию, Португалию, Италию, Австралию, Индию и Пакистан. К отбору статей была привлечена команда из семи экспертов — теоретических и прикладных эконометристов. В результате было сформировано одиннадцать регулярных сессий и две сессии стендовых презентаций в общем итоге из 38 статей (см. буклет).



Более тридцати докладчиков представляли, помимо ВШЭ с её филиалами и РЭШ, Европейский университет в Санкт-Петербурге, Новосибирский государственный университет, Лондонскую школу экономики, Тулузский университет, Университетский колледж Лондона и другие российские и европейские исследовательские центры.



**HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS
NEW ECONOMIC SCHOOL**

International conference
***Modern econometric tools
and applications***

Nizhny Novgorod
September 18-20, 2014

Conference program



Conference committees

Program Committee

Stanislav Anatolyev (chair), New Economic School, Russia

Kateryna Bornukova, Belarusian Economic Research and Outreach Center, Belarus

Svetlana Bryzgalova, London School of Economics, UK

Rustam Ibragimov, Imperial College London, UK

Igor Kheifets, New Economic School, Russia

Stanislav Khrapov, New Economic School, Russia

Anna Mikusheva, Massachusetts Institute of Technology, USA

Local Organizing Committee, Higher School of Economics – Nizhny Novgorod

Oleg Kozyrev

Svetlana Lapinova

Alexander Larin

Liudmila Leonova

Andrei Maximov

Oleg Poldin

Maria Shtefan

Andrei Silaev

Rules for contributed sessions

The chair of a contributed session is the first listed presenter. Each presentation is supposed to take 30 minutes.

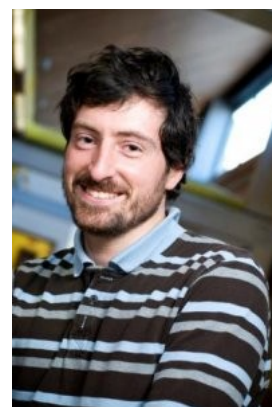
Invited speakers

Stanislav Anatolyev is Professor of economics at the New Economic School, Moscow. Stanislav received his Ph.D. in economics from the University of Wisconsin–Madison. His research interests include instrumental variables estimation, including optimal instrumentation and inference with many instruments, higher order asymptotic methods, GMM and empirical likelihood, as well as modeling volatility and higher order moments. Stanislav has published in *Econometrica*, *Journal of Econometrics*, *Econometric Theory*, *Journal of Business & Economic Statistics*, *Econometrics Journal*, *Econometric Reviews*, and other journals. He is a coauthor of the book *Methods for Estimation and Inference in Modern Econometrics*. Professor Anatolyev is a founding editor of *Quantile*, an international econometrics journal in Russian language.



Rustam Ibragimov is Professor of finance and econometrics at the Imperial College London Business School. Rustam received his Ph.D. in economics from Yale University and was working in Harvard University for many years. He also collaborates with Kazan Federal University and other research centers in the former USSR. Rustam's research interests include, among others, modeling crises in financial and economic markets, development of robust statistical inference methods and their applications in financial econometrics. Rustam has published in *Journal of Financial Economics*, *Review of Financial Studies*, *Journal of Econometrics*, *Journal of Business & Economic Statistics*, *Econometric Theory*, *Annals of Probability*, and many other journals. He is also a coauthor of the book *Heavy-Tailed Distributions and Robustness in Economics and Finance*.

Eric Gautier is Professor of mathematics and econometrics at the ENSAE ParisTech of Centre de la Recherche en Économie et Statistique in Paris. Eric received his Ph.D. in economics from the University Paris 1 Sorbonne, and earlier Ph.D. in mathematics from the University of Rennes 1. Eric's research interests include nonparametric methods, high-dimensional models and their applications, Markov Chains Monte-Carlo methods, Bayesian statistics with economic applications, as well as many topics in stochastic analysis. Professor Gautier has published in *Econometrica*, *Annals of Probability*, *Annals of Applied Statistics*, *Annals of Applied Probability*, and others. He is a coauthor of the book *Inverse Problems and High Dimensional Estimation*. Professor Gautier will be working at the *Toulouse School of Economics* from September of 2014.



Victoria Zinde-Walsh is Professor of economics at McGill University, Canada. Victoria received her Ph.D. from Moscow State University, and was working at the University of Western Ontario for a number of years. Her research interests include many topics in econometric theory and time series, such as nonparametric estimation, binary choice models, non-smooth regression methods, ARMA and GARCH models. Victoria has publications in *Econometrica*, *Journal of Econometrics*, *Econometric Theory*, *Journal of Nonparametric Statistics*, *Econometrics Journal*, *Econometric Reviews*, and other economics and statistics journals. Professor Zinde-Walsh is a member of the editorial counsel and author of *Quantile*, an international econometrics journal in Russian language.

Thursday, September 18

8:30–9:15 Registration

9:15–9:30 Opening

Stanislav Anatolyev, Chair of Program Committee

9:30–10:30 Invited lecture 1

Stanislav Anatolyev (New Economic School) “Many instruments and regressors”

10:30–10:50 Coffee break

10:50–12:20 Session 1: Hypothesis testing

Pascal Lavergne (Toulouse School of Economics) “Model equivalence tests for overidentifying restrictions”

Artem Duplinskiy (Maastricht University) “Is regularization necessary? Wald-type test under nonregular conditions”

Alexander Larin (Higher School of Economics) “A test for the redundancy of moment conditions”

12:20–12:40 Coffee break

12:40–13:40 Session 2: Time series econometrics

Iliyan Georgiev (Universidade Nova de Lisboa) “Sieve-based inference for infinite-variance stationary linear processes” (coauthored with Giuseppe Cavaliere and Robert Taylor)

Xiaojun Song (Universidad Carlos III de Madrid) “Testing symmetry of a nonparametric conditional distribution” (coauthored with Miguel A. Delgado)

13:40–15:00 Lunch

15:00–16:00 Posters 1

Evgeniya Kolomak (Novosibirsk State University) “Spatial inequalities in Russia: dynamic and sectorial analysis”

Elena Kopnova (Higher School of Economics) “The econometric approach in studying tendencies of environmental use”

Rodion Lomivorotov (Higher School of Economics) “Bayesian estimation of monetary policy model with large number of variables”

Thursday, September 18

Svetlana Makarova (University College London) “Conditional term structure of the Canadian inflation forecast uncertainties: the copula approach” (coauthored with Wojciech Charamza and Carlos Díaz)

Anna Novak (Higher School of Economics) “Euler equation with habits and measurement errors: estimates on Russian micro data” (coauthored with Irina Khvostova and Alexander Larin)

Petr Parshakov (Higher School of Economics) “Russian mutual funds: skill vs. luck”

Elena Vakulenko (Higher School of Economics) “Breaking out of poverty traps: Internal migration and interregional convergence in Russia” (coauthored with Sergei Guriev)

16:00–17:30 Session 3: Financial econometrics

Aleksey Kolokolov (Lund University) “Multi-jumps” (coauthored with Massimiliano Caporin and Roberto Renò)

Hakan Eratalay (European University at St. Petersburg) “Do correlated markets have more volatility spillovers?”

Alexey Balaev (Economic Expert Group) “Multivariate modeling of returns on Russian equities and optimal portfolio construction”

17:30–17:50 Coffee break

17:50–18:50 Session 4: Applied spatial econometrics

Olga Demidova (Higher School of Economics) “Spatial effects of youth unemployment rate in the Russian and Italian regions” (coauthored with Enrico Marelli and Marcello Signorelli)

Vera Ivanova (Higher School of Economics) “Spatial interaction of Russian cities: an empirical study”

19:00– Welcome party

Friday, September 19

9:00–10:00 Invited lecture 2

Rustam Ibragimov (Imperial College London) “Modern approaches to robust inference”

10:00–10:10 Coffee break

10:10–11:10 Session 5: Econometrics of asset pricing

Stanislav Khrapov (New Economic School) “Option pricing via risk-neutral density forecasting”

Svetlana Bryzgalova (London School of Economics) “Spurious factors in linear asset pricing models”

11:10–11:30 Coffee break

11:30–12:30 Invited lecture 3

Eric Gautier (ENSAE ParisTech) “Random coefficient models”

12:30–12:40 Coffee break

12:40–14:10 Session 6: Advances in macroeconometrics

Nikolay Arefiev (Higher School of Economics) “Identification of structural models with testable exclusion restrictions”

Fedor Iskhakov (University of New South Wales) “Bequest motives in a life-cycle model with intergenerational interactions” (coauthored with Loretta Dobrescu)

Andrei Sirchenko (Higher School of Economics) “A cross-nested ordered probit model with an application to policy interest rate”

14:10–15:30 Lunch

15:30 City tour

Saturday, September 20

9:00–10:00 Invited lecture 4

Victoria Zinde-Walsh (McGill University) “Developments in non-parametric econometrics”

10:00–10:20 Coffee break

10:20–11:20 Session 7: Nonparametric methods

Christoph Breunig (Yale University) “Semi/nonparametric estimation in case of endogenous selection” (coauthored with Enno Mammen and Anna Simoni)

Evgeniy Ozhegov (Higher School of Economics) “Nonparametric estimation of systems of simultaneous equations with sample selection”

11:20–11:30 Coffee break

11:30–12:30 Session 8: Econometrics of auctions and contracts

Christian Bontemps (Toulouse School of Economics) “Identification and estimation of incentive contracts under asymmetric information: an application to the French water sector” (coauthored with David Martimort)

Tatiana Komarova (London School of Economics) “Simultaneous first-price auctions with preferences over combinations” (coauthored with Matthew Gentry and Pasquale Schiraldi)

12:30–12:40 Coffee break

12:40–13:40 Session 9: Specification testing

Igor Kheifets (New Economic School) “New goodness-of-fit diagnostics for conditional discrete response models” (coauthored with Carlos Velasco)

Alexander Tsyplakov (Novosibirsk State University) “Theoretical guidelines for a partially informed forecast examiner”

13:40–15:00 Lunch

15:00–16:00 Posters 2

Alexander Kostrov (Higher School of Economics) “Probability of default modeling for banks in CIS countries” (coauthored with Alexander Karminsky)

Saturday, September 20

Valeria Lakshina (Higher School of Economics) “Does Twitter mood impact stock market indexes?” (coauthored with Alexander Porshnev)

Andrey Maksimov (Higher School of Economics) “On models of diagnostics of SME’s financial insolvency” (coauthored with Olga Bolshakova)

Mikhail Mamonov (Higher School of Economics) “Bad management, skimming, or both? The relationship between cost efficiency and loan quality in Russian banks”

Anna Pestova (Center for Macroeconomic Analysis and Short-Term Forecasting) “Leading indicators of turning points of the business cycle: panel data analysis for OECD countries and Russia”

Philip Ushchev (Higher School of Economics) “Wages, productivity, and market power” (coauthored with Oleksandr Shepotylo and Volodymyr Vakhitov)

16:00–17:30 Session 10: Empirical macroeconometrics

Valery Charnavoki (New Economic School) “The effects of global shocks on small commodity-exporting economies: lessons from Canada” (coauthored with Juan Dolado)

Svetlana Makarova (University College London) “Term structure of inflation forecast uncertainties and skew normal distributions” (coauthored with Wojciech Charamza and Carlos Díaz)

Konstantin Styryn (New Economic School and Pennsylvania State University) “GMM estimation of the New Keynesian Phillips Curve with externally identified structural shocks as instruments” (coauthored with Bulat Gafarov)

17:30–17:50 Coffee break

17:50–18:20 Session 11: Applied labor econometrics

Andrey Aistov (Higher School of Economics) “Individual returns to training: evidence from a Russian firm” (coauthored with Ekaterina Aleksandrova)

18:20–18:30 Closing

Affiliations of conference speakers

Center for Macroeconomic Analysis and Short-Term Forecasting, Russia

Economic Expert Group, Russia

ENSAE ParisTech, France

European University at St. Petersburg, Russia

Higher School of Economics – Nizhny Novgorod, Russia

Higher School of Economics – Moscow, Russia

Higher School of Economics – Perm, Russia

Imperial College London, UK

London School of Economics and Political Science, UK

Lund University, Sweden

Maastricht University, Netherlands

McGill University, Canada

New Economic School, Russia

Novosibirsk State University, Russia

Pennsylvania State University, USA

Toulouse School of Economics, France

Universidad Carlos III de Madrid, Spain

Universidade Nova de Lisboa, Portugal

University College London, UK

University of New South Wales, Australia

Yale University, USA

International conference “Modern econometric tools and applications”
National Research University Higher School of Economics
Nizhny Novgorod

Webpage: ec2014.hse.ru

Email: ec2014@hse.ru

Quantile

No. 13, May 2015

ISSN 2309-3013

English page in the world wide web: <http://quantile.ru/eng>

Electronic mail address: quantile@quantile.ru

Access to the journal is free and unlimited

EDITOR

Stanislav Anatolyev

New Economic School (Moscow, Russia)

EDITORIAL COUNSEL

Victoria Zinde-Walsh

McGill University (Montréal, Canada)

Rustam Ibragimov

Imperial College London (London, UK)

Anna Mikusheva

Massachusetts Institute of Technology (Cambridge, USA)

Alexey Onatsky

Cambridge University (Cambridge, UK)

Alexander Tsyplakov

Novosibirsk State University (Novosibirsk, Russia)

Victor Chernozhukov

Massachusetts Institute of Technology (Cambridge, USA)

GUIDE TO AUTHORS

Manuscripts for publication in the “Articles” section should be submitted by electronic mail to the address *submit@quantile.ru*. Submitted work may be drawn from any applied field within the economics profession. The main requirement is correct usage of adequate econometric methodology. The manuscript should be written in Russian (for Russian-speaking persons) or in English (for all others) in the *Microsoft Word* or (preferably) *LaTeX* formats, and not exceed 30 double-spaced A4 pages. All submissions are subject to quality control by the editorial counsel and independent referees. A promising manuscript may be returned to the author(s) for polishing or rewriting. The editor also invites econometrics experts worldwide to contribute to the methodological sections of the journal.

Articles and methodological material published in “Quantile” do not transfer original copyright, neither in full, nor in part.

Quantile

*international econometric journal
in Russian language*

**No. 13
May 2015**

IN THIS ISSUE

Editor. Gratitude to referees	1
Econometric literacy: volatility	
Kalnina, Ilze; Sizova, Natalia. Estimation of volatility measures using high frequency data	3
Articles: econometric theory	
Ozhegov, Evgeniy. Identification in a class of nonparametric simultaneous equation models with sample selection	15
Articles: macroeconometrics	
Poghosyan, Karen. Alternative models for forecasting the key macroeconomic variables in Armenia	25
Bezborodova, Alexandra; Mihalenok, Yury. Analysis of the monetary policy transmission mechanism in the Republic of Belarus: Bayesian approach	41
Conferences	
International conference "Modern econometric tools and applications"	63